Uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Registrado na Comissão Nacional do Livro Didático sob n.º 867.

ilustrações do arquiteto

HUGO RIBEIRO

desenho de capa:

EUGÊNIO HIRSCH

Exemplar Nº 7785

1963

Obra executada nas oficinas da
São Paulo Editora S. A. — São Paulo, Brasil

ARY QUINTELLA
Professor Catedrático do Colégio Militar

MATEMÁTICA

para a

primeira série ginasial

(Com 1 050 exercícios)

106.ª Edição

(70 milheiros)

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

Do mesmo autor:

CURSO GINASIAL:

1. *Matemática*, primeira série.
2. *Matemática*, segunda série.
3. *Matemática*, terceira série.
4. *Matemática*, quarta série.

CURSO COLEGIAL:

5. *Matemática*, primeiro ano.
6. *Matemática*, segundo ano.
7. *Matemática*, terceiro ano.

CURSO COMERCIAL BÁSICO: (esgotados)

8. *Aritmética Prática*, primeiro ano.
9. *Matemática*, segundo ano.
10. *Álgebra Elementar*, terceiro ano.
11. *Matemática*, (em preparo).

CURSO DE ADMISSÃO:

(Em colaboração com o Prof. Newton O'Reilly)

12. *Exercícios de Aritmética*.

(Em colaboração com o Prof. Vitalino Alves)

13. *Matemática*. Questões de Concurso nas Escolas Superiores.

ARTIGO 91:

14. *Guia de Matemática*.

EDIÇÕES DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 — São Paulo

★

CURSO NORMAL:

(Em colaboração com o Prof. Francisco Junqueira)

15. *Exercícios de Matemática*.

PREFÁCIO

A NOVA APRESENTAÇÃO da nossa série de Matemática para o Curso Ginasial não difere, em seus fundamentos, da anterior. Assim, continuamos a julgar que as propriedades dos números e das operações bem como as regras de cálculo, devem ser justificadas, rejeitando-se dêsse modo, o *método dogmático*. Nas justificações é mantido o critério objetivo, isto é, a partir da apresentação concreta de problemas simples.

Com a intenção de facilitar o mais possível o trabalho dos colegas que nos têm honrado com a adoção de nossos compêndios, sugerimos um plano de curso com o título *Plano de Desenvolvimento do Programa* onde fazemos uma previsão, naturalmente não rígida, do número de aulas destinadas a cada assunto.

Além disso, foi feita uma nova distribuição e inclusão de exercícios e trabalhos, marcando, aproximadamente, cada plano de aula e permitindo uma permanente verificação da aprendizagem.

No fim de cada sub-unidade, um grupo de deveres para casa, com maior número de exercícios, entre os quais poderão os colegas selecionar os que julgarem mais convenientes.

Finalmente, cada unidade é completada com *Testes de Unidade*, objetivando uma revisão de todos os assuntos da mesma e a fixação da aprendizagem.

Procuramos, assim, obedecer aos preceitos da Didática Especial da Matemática em seu aspecto mais moderno. En-

contram-se no texto algumas sugestões sôbre o uso de material didático muito simples, pois julgamos ser seu emprêgo indispensável nas primeiras séries.

Grande preocupação tivemos, também, em tornar o livro didático atraente e de uso constante do aluno na aula e fora dela, para o que contamos com o decidido apôio da *Companhia Editora Nacional*, o que com prazer registamos.

Gratos aos colegas que nos têm enviado suas preciosas críticas, as quais esperamos continuar a merecer.

Rua General Artigas 533, Ap. 301
Leblon — Rio de Janeiro.

ARY QUINTELLA

MATEMÁTICA

PLANO DE DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

PRIMEIRA SÉRIE GINASIAL

Primeiro período: 34 aulas

Segundo período: 36 aulas

Números inteiros. Numeração

1. *Noção de número natural*

Desde cedo teve o homem necessidade de verificar quantos objetos figuravam em um grupo.

Antes que soubessem contar, os pastôres verificavam se alguma ovelha de seus rebanhos se tinha extraviado, fazendo corresponder a cada uma delas uma pedra que colocavam na bôlsa. Na volta do rebanho, a última ovelha devia corresponder à última pedra; tinham, assim, a noção dos *números naturais*, embora não lhes dessem *nomes* nem os representassem por *símbolos*.

Faziam, dêsse modo, corresponder as duas coleções ou conjuntos:

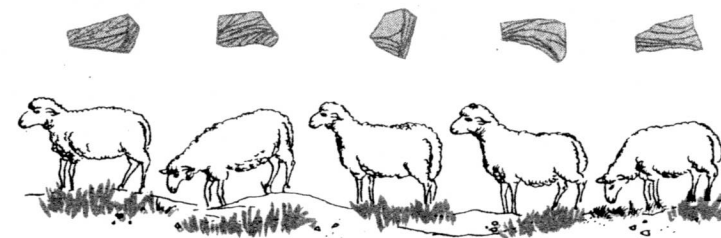



Fig. 1

A cada objeto dá-se o nome de **unidade** ou *elemento* do *conjunto*.

Observemos que a cada elemento do primeiro conjunto corresponde um elemento do segundo e a cada um do segundo corresponde um do primeiro.

Nós dizemos que os dois conjuntos têm a *mesma importância* e traduzimos esta propriedade pelo mesmo adjetivo:

cinco ovelhas, **cinco** pedras.

É claro que a natureza dos objetos não influi na correspondência citada. Os objetos da primeira coleção podem ser laranjas, por exemplo, e os da segunda, tijolos.

A característica comum às duas coleções ou conjuntos de terem a *mesma importância* independente da forma, da natureza e da disposição de seus elementos é que nos dá a idéia de **número natural.**

Atualmente, em lugar das pedrinhas, empregam-se em todo mundo para estabelecer a correspondência, os símbolos

1, 2, 3, 4, 5, ...

A êste conjunto, utilizado na correspondência com todos os demais, dá-se o nome de **sucessão dos números naturais.**

Contar é achar o número da sucessão natural que corresponde a um conjunto dado.

Podemos imaginar a possibilidade de juntar *mais uma unidade* a uma coleção para formar uma *coleção nova*. Esta possibilidade traduz a propriedade

A sucessão dos números naturais é ilimitada

Assim, se tivermos um número qualquer a, podemos formar o seguinte juntando uma unidade: $a + 1$.

$a + 1$ **é** CONSECUTIVO **de** a

Exemplos:

O consecutivo de 6 é $6 + 1$ ou 7, o de 347 é $347 + 1$ ou 348.

2. *Número concreto. Número abstrato*

Quando, além do número de elementos de um conjunto, especificamos a sua natureza, o número chama-se **concreto.** Exemplos:

5 livros, *três* carteiras, *4* metros, . . . são números concretos.

Se fizermos **abstração,** isto é, se não levarmos em conta a natureza dos elementos de um conjunto, como podemos pensar na *côr azul* fazendo abstração do objeto, diremos

cinco unidades, oito unidades . . .

ou apenas cinco, oito, ... ou 5, 8, ...

Cada um dêstes símbolos ou nomes é um *número* **abstrato.**

3. *Número cardinal. Número ordinal*

Chama-se *número cardinal* o número que traduz *quantos* elementos tem um conjunto.

Os números são também utilizados para indicar a *posição de certo elemento no conjunto*. Assim, diremos, o elemento que corresponde ao número cinco ou o *quinto* elemento. Neste caso os números recebem o nome de *ordinais*.

● O número cardinal representa um conjunto e o número ordinal representa um elemento tendo em conta a ordem.

4. *Coleção vazia. Número zero. Números inteiros*

Se, dada uma coleção, retirarmos, um a um, os elementos que a compõem, ao excluirmos o último elemento obteremos uma *coleção vazia,* a que fazemos corresponder o *número zero* (0).

A sucessão dos números naturais, fica então ampliada para

0, 1, 2, 3, . . .

Esta nova sucessão chama-se *sucessão dos números inteiros.*

Zero pertence à sucessão dos inteiros, mas não pertence à sucessão dos números naturais.

5. *Comparação de dois conjuntos. Igualdade. Desigualdade*

1.º) Observe a figura 2.

FIG. 2

Cada aluno está sentado numa carteira?

Cada carteira é ocupada por um aluno?

A cada aluno corresponde uma carteira. A cada carteira corresponde um aluno. Neste caso, os dois conjuntos têm o mesmo *número cardinal* de elementos. Escreve-se:

$a = c$ (lê-se; a igual a c)

A relação $a = c$ chama-se **igualdade.** O número a (número de alunos), escrito à esquerda, chama-se **primeiro membro,** e c (número de carteiras), **segundo membro.**

A igualdade pode ser lida nos dois sentidos: $a = c$ ou $c = a$.

2.º) Observe a figura 3.

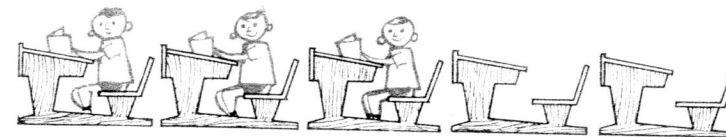



FIG. 3

Cada aluno está sentado numa carteira?

Cada carteira é ocupada por um aluno?

A cada aluno corresponde uma carteira. Mas, há carteiras a que não correspondem alunos.

O número de carteiras (c) *é maior do que o número de alunos* (a).

Escreve-se: $c > a$ (lê-se: c maior que a)

O número de alunos (a) *é menor que o número de carteiras* (c).

Escreve-se: $a < c$ (lê-se a menor que c).

Às relações $a < c$ e $a > c$ dá-se o nome de **desigualdades.** O número escrito à esquerda chama-se **primeiro membro,** e, o da direita, **segundo membro.**

6. *Propriedades*

1) Veja a figura 4, onde representamos por a o número de bolas rosas, por b, o de bolas brancas e por c o de bolas pretas.

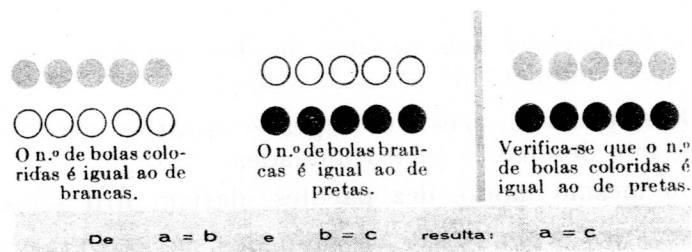



Fig. 4

conclua, então, a propriedade:

Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si

Em linguagem simbólica esta propriedade escreve-se

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ b = c \end{array}\right\} \Longrightarrow a = c.$$

O símbolo $\Longrightarrow$ significa: *daí resulta, acarreta* ou *implica em*. Podemos chamá-lo *símbolo de implicação*.

2) Mesmo sem utilizar uma figura pode-se compreender que, anàlogamente, das desigualdades

$$a < b \quad \text{e} \quad b < c$$

resulta a desigualdade

$$a < c$$

O que simbòlicamente se escreve

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ b < c \end{array}\right\} \Longrightarrow a < c$$

7. *Resumo*

Você deve fixar o sentido dos símbolos:

$=$ ...... igual
$>$ ...... maior que
$<$ ...... menor que
$\Longrightarrow$ ..... acarreta ou implica em

Além dêsses, usaremos os símbolos:

$\neq$ ..... diferente
$\geqslant$ ou $\not<$ maior ou igual, isto, é *não é menor*
$\leqslant$ ou $\not>$ menor ou igual, isto é, *não é maior*.

EXERCÍCIOS

Complete:

1. O consecutivo de 783 é ....
2. 584 é o consecutivo de ....
3. O antecedente de 1 017 é ....
4. Se x representar um elemento qualquer do conjunto dos números naturais, seu consecutivo será representado por ....
5. Coloque em ordem crescente os números (use o sinal $<$); 1 317 — 419 — 2 520 — 1 318 — 921. *Resp.* ....
6. Coloque em ordem decrescente (use o sinal conveniente). 2 021 — 482 — 527 — 1 038 — 2 530. *Resp.* ....
7. Os valores que pode tomar o número natural a para satisfazer às duas condições:
   $a < 23$
   $a > 18$ são ....
8. E para as condições
   $a \leqq 15$
   $a \geqq 20$ são ....
9. Veja se pode colocar o símbolo $\Longrightarrow$ entre as desigualdades
   $a < b$ ..... $b > a$,
   e entre $a > b$ ..... $b < a$?
10. Três números naturais são representados por a, b, c. Compare a com c nos casos seguintes:
   $\left.\begin{array}{l} a = b \\ b < c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \,..\, c$ $\quad \left.\begin{array}{l} a > b \\ b \geqq c \end{array}\right\} \Longrightarrow$ .... $\quad \left.\begin{array}{l} a < b \\ b < c \end{array}\right\} \Longrightarrow$ .....

8. *Numeração falada*

A sucessão dos números naturais é ilimitada. Daí, a impossibilidade de criar um nome para cada número.

A numeração falada ensina a enunciar todos os números com um pequeno número de palavras.

Com **doze** palavras nós podemos contar até **mil.**

E, com **quatorze,** até um **bilhão.**

1.º) ***Números menores que mil.*** Suponhamos que queremos contar os selos de uma coleção. Você pode fazer a experiência com selos ou com fósforos etc.

Grupemos os selos de *dez* em *dez* e guardemos cada ***dezena*** em um envelope.

Os selos que sobram fora dos envelopes são **menos de dez,** por exemplo, *quatro* como mostra a figura 5.

Gruparemos, então, os envelopes de *dez* em *dez* e faremos pacotes de dez envelopes. Cada pacote conterá dez envelopes ou uma **centena** ou um **cento** de selos (dez envelopes de dez selos são cem selos ou uma centena).

Os envelopes que sobram são **menos de dez,** *três,* por exemplo.

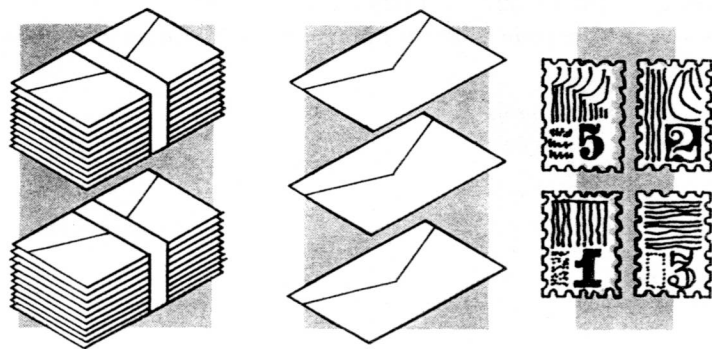



Fig. 5

Se formarmos dois pacotes de **dez** envelopes, podemos dizer que o número de selos da coleção é:

Dois pacotes, **três** envelopes e **quatro** selos, ou *dois* centos, *três* dezenas e *quatro* unidades.

Do mesmo modo, dez pacotes, dariam **mil** selos.

As UNIDADES SIMPLES são as unidades de PRIMEIRA ORDEM
As DEZENAS (*dez unidades*) são as unidades de SEGUNDA ORDEM
As CENTENAS (*dez dezenas*) são as unidades de TERCEIRA ORDEM
Os MIL ou MILHARES (*dez centenas*) são as unidades de QUARTA ORDEM

Estas definições são resumidas na seguinte

CONVENÇÃO FUNDAMENTAL

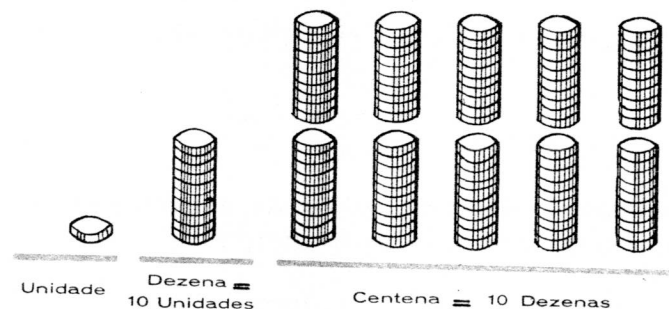



Fig. 6

Dez unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior

Dez é a **base** de nosso sistema de numeração que, por isto, é chamado **sistema de numeração decimal.**

Assim, para enunciar os números até **mil,** basta dar um nome a cada um dos dez primeiros números e, em seguida, um nome para cada uma das ordens.

Observemos que a *linguagem usual* introduziu nomes que na técnica da numeração seriam dispensáveis, como *onze, doze, treze, quatorze, quinze, vinte, trinta* etc.

2.º) ***Números maiores que mil.*** Para dar nome aos números maiores que mil formam-se grupos de **três ordens,** a partir das unidades simples. Cada grupo de três ordens forma **uma classe.**

Basta, pois, acrescentar **um nome** para cada classe, como mostra o quadro:

CLASSES	BILHÕES			MILHÕES			MIL OU MILHARES			UNIDADES SIMPLES		
ORDENS	12.ª	11.ª	10.ª	9.ª	8.ª	7.ª	6.ª	5.ª	4.ª	3.ª	2.ª	1.ª
	c	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*	*c*	*d*	*u*
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

O número que se vê acima enuncia-se:

1 bilhão 234 milhões 567 mil 890 (unidades).

9. *Numeração escrita. O valor de posição*

Nós todos sabemos que os símbolos usados para escrever os números chamam-se **algarismos,** palavra originada de *Al-Carismi*, cognome do geógrafo e matemático árabe Abu Abdallah Mafamede bem Musa, que os introduziu na Europa. São, ao todo dez:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que são os algarismos **significativos** e 0 (zero).

Podemos utilizar o quadro acima para escrever os números, colocando, em cada coluna, o número de unidades de cada uma das ordens.

Utilize por exemplo, o quadro para escrever o número: três milhões, quarenta mil, oitocentos e sete.

As convenções seguintes tornam inútil o uso do quadro, e constituem o que chamamos **numeração escrita.**

1. O primeiro algarismo, escrito à direita, representa *unidades simples.*

2. **Todo algarismo escrito imediatamente à esquerda de outro representa unidades de ordem imediatamente superior.**

3. As ordens que faltam são representadas por *zero.*

4. O número deve ser separado em classes de três algarismos, a partir da direita. A separação será feita *exclusivamente* por um pequeno intervalo.

Assim: 3 040 807

O algarismo assume dêsse modo, um valor pela *sua posição* no número, que se chama **valor relativo.**

No número 23 437 o algarismo 3 figura duas vêzes:

— na 1.ª posição ocupa a 4.ª ordem, das unidades de milhares, *seu valor relativo é*

3 000

— na 2.ª posição ocupa a 2.ª ordem, das dezenas, seu valor relativo é

30

O valor do algarismo independente da posição chama-se **valor absoluto.** Exemplos:

1.º) A soma dos valores absolutos dos algarismos do número 23 437 é:

$$2 + 3 + 4 + 3 + 7 = 19$$

2.º) A soma dos valores relativos é:

20 000 + 3 000 + 400 + 30 + 7 = 23 437 (o próprio número).

10. *Decomposição nas unidades de diversas ordens*

O número 425 tem 4 centenas, 2 dezenas e 5 unidades.

As 4 centenas são 4 grupos de 100 ou 4×100

As 2 dezenas são 2 grupos de 10 ou 2×10

Assim, compreende-se que

$$425 = 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5 \text{ ou } 4 \text{ cent.} + 2 \text{ dez.} + 5 \text{ unidades}$$

Dizemos, então, que o número foi decomposto nas unidades de diversas ordens.

11. *Aplicações*

1. Qual é a unidade de 4.ª ordem? E de 3.ª?
2. Qual o valor relativo do algarismo 5 no número 25 287?
3. Qual é maior, o valor absoluto ou o relativo do algarismo 4 no número 5 407?

   Quantas vêzes maior?

   E do algarismo 7, qual o maior valor, o relativo ou o absoluto?
4. Qual a soma dos valores absolutos dos algarismos do número 5 248?
5. Qual deve ser o valor do algarismo a no número $2\,3a7$ para que a soma dos valores absolutos dos algarismos seja 18?
6. Complete a implicação:

   $$\left.\begin{array}{l} a \text{ inteiro} \\ a < 1\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow a \text{ tem no máximo } ________ \text{ algarismos.}$$
7. Estudando o valor relativo dos algarismos, diga as alterações que sofre o número 54, quando colocamos um zero à sua direita. De quanto aumenta?
8. O número formado de 8 unidades de 5.ª ordem, 3 de 3.ª e 5 de 2.ª, é ....

9. O número 9 875 430 261 tem .... classes e .... ordens e a ordem mais elevada denomina-se ....
10. No número 5 897 634 o valor absoluto do algarismo que ocupa a ordem das centenas de milhares é .... e o valor relativo é ....
11. O menor número de 3 algarismos diferentes é ....
12. O maior número de 3 algarismos é ....
13. Existem .... números de 3 algarismos e .... de 4 algarismos.
14. O maior número de 3 algarismos significativos diferentes é ....

12. *Numeração romana*

Os romanos usavam como algarismos as sete letras maíusculas:

Letras:	I	V	X	L	C	D	M
Valores:	1	5	10	50	100	500	1000.

Atualmente escrevem-se os números com êstes algarismos usando *cinco* convenções.

1.ª) Uma letra pode ser usada no máximo **três vêzes** em sucessão:

II = 2; XX = 20; XXXIX = 39; CCC = 300.

Excetuam-se: V, L, D, que *não podem ser repetidos.*

2.ª) *Um algarismo, colocado à* ***direita*** *de outro de* ***maior*** *valor, ser-lhe-á* ***adicionado:***

VI = 6; CL = 150; MD = 1500; XI = 11.

3.ª) *Um algarismo, colocado à* ***esquerda*** *de outro de* ***maior*** *valor, ser-lhe-á* ***subtraído:***

IV = 4; CM = 900; XC = 90.

4.ª) *Um algarismo* ***intercalado*** *entre dois de maior valor, tem seu valor subtraído do da direita:*

XIV = 14; XIX = 19; MCM = 1900.

5.ª) *Um traço horizontal, colocado acima de um algarismo ou de um grupo de algarismos, torna seu valor* ***mil*** *vêzes maior:*

$\overline{\text{V}}$XI = 5011 $\overline{\text{XIX}}$CXL = 19 140

13. *Aplicações*

- **Escreva em algarismos romanos:**
  1. **O ano da proclamação da República:** ....
  2. **O ano em que você nasceu:** ....
  3. **Os números: 1 589, 214, 4 419:** ....
- **Escreva com algarismos arábicos: MCDLXXIX, DCXLIV, MMXCVI, $\overline{\text{VI}}$CCVII.** ....

14. *Vamos contar na base doze?*

Numa loja de botões os mesmos são preparados para a venda pregando-os em cartões de 12 botões cada um. Êstes cartões são guardados em caixas de papelão tendo cada uma 12 cartões.

Esta maneira de acondicionar corresponde a estabelecer a convenção:

- ***Doze unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior.***

A base é 12.

Como se chamam, na linguagem usual do comércio, as unidades de 2.ª ordem (um cartão) dêsse sistema?

E as de 3.ª ordem?

Uma dúzia, nêsse sistema, é **uma unidade de 2.ª ordem** portanto deve escrever-se

$$10_{(12)}$$

Uma grosa (12 dúzias) é uma unidade de 3.ª ordem e escreve-se

$$100_{(12)}$$

Como se escrevem 2 dúzias e meia (6 unidades) nêsse sistema?

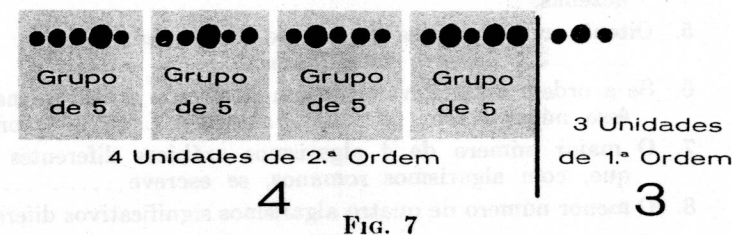
Se contarmos por dúzias uma outra coleção de 28 botões, achamos 2 dúzias (2 unidades de 2.ª ordem) e sobram 4 botões. Ora, 2 unidades de 2.ª ordem e 4 de 1.ª escreve-se:

$$24_{(12)}$$

Assim, 28 objetos contados na base 12 dão o número $24_{(12)}$.

15. *Aplicações*

- **Conte os pontos abaixo na base 5, isto é, formando grupos de 5.**

Fig. 7

1. **Quantos grupos de 5 ficaram formados?**
2. **Quantas unidades de 2.ª ordem, na base 5, existem?**
3. **Quantos objetos sobraram fora dos grupos?**
4. **Veja que o número de pontos, contados na base 5, contém 4 unidades de 2.ª ordem e 3 de 1.ª, isto é:**

$$43_{(5)}$$

- **O número 9 na base 5 escreve-se** .... (5)
- **13 botões formam** .... **grupos de 5 e sobram** .... **botões, então, 13 na base 5 escreve-se** .... (5)

Complete o quadro, escrevendo os números na base 5;

base 10	5	6	7	8	10	11	12	25	27
base 5	10	11	---	---	---	---	---	---	---

4 grosas, 3 dúzias e 5 lápis, na base 12 escreve-se ------------------
O número correspondente na base 10 é ------------.

EXERCÍCIOS DA SUB-UNIDADE

Preencha as lacunas:

1. Para formar 5 unidades de 4.ª ordem, preciso de --------- unidades de 3.ª ordem.
2. Quantas dezenas, centenas e milhares tem o número 24 836? *Resp.*:---------,---------e---------
3. Um número tem 12 algarismos. Êsse número compõe-se de ---- classes e a ordem de suas unidades mais elevadas é a das------------
4. Para formar 25 unidades de 4.ª ordem são necessárias --------- dezenas.
5. Oitenta mil unidades de 1.ª ordem formam --------- centenas ou --------- dezenas de milhares.
6. Se a ordem mais elevada de um número é a das dezenas de bilhões, êsse número tem --------- classes e --------- ordens.
7. O maior número de 4 algarismos arábicos diferentes é --------- que, com algarismos romanos, se escreve ------------.
8. O menor número de quatro algarismos significativos diferentes é------ ------.
9. O maior número de 4 algarismos é ------------.
10. Quantos números existem de 5 algarismos? *Resp.*:------------
11. Se escrevermos todos os números de 4 algarismos, escreveremos ------ números e --------- algarismos.
12. Se fizermos a lista dos números naturais de 1 a 99, escreveremos ao todo --------- algarismos.
13. Um número de 14 algarismos tem --------- classes e --------- ordens.
14. Complete os segundos membros com algarismos romanos
    53 = -------, 82 = -------, 237 = -------, 581 = -------,
    1 325 = ---------, 27 843 = --------- 12 938 = ---------,
    15 897 = ------------.

15. Escreva com algarismos arábicos: DLXXXI, MDXCVII, $\overline{XII}$CDXCVI, MDCCXCIX.
16. Meia unidade de 4.ª ordem vale --------- unidades simples.
17. O número formado de meia unidade de 4.ª ordem, 7 unidades de 2.ª ordem e 4 de 1.ª ordem é ------------.
18. De 345 a 789, incluídos êsses números, existem -------- números inteiros e consecutivos.
19. De 76 a 894, incluídos êsses números, existem -------- números inteiros, sendo -------- pares e -------- ímpares.
20. De 37 a 453, inclusives, existem -------- números pares e -------- ímpares.
21. Se o algarismo 9 ocupar a 3.ª ordem, seu valor absoluto será ------ e seu valor relativo será ---------.

Resolva os problemas:

22. Se fizermos a lista de todos os números naturais de 3 algarismos, quantos algarismos escreveremos?
23. Regina escreveu todos os números inteiros de 3, 4 e 5 algarismos. Quantos números e quantos algarismos escreveu?
24. Maria Emília escreveu de 1 a 99, inclusive, e Mirilda, de 1 000 a 1 283, incluídos êsses números. Quantos algarismos escreveu cada uma?
25. Maria Helena numerou as 137 páginas de seu caderno de matemática. Quantos algarismos escreveu?
26. Maria Cecília escreveu os números inteiros desde 47, inclusive, até 356, inclusive. Quantos algarismos escreveu?
27. Carlos Roberto escreveu do menor número de 3 algarismos significativos desiguais até o maior número de 5 algarismos desiguais, incluídos êsses números. Quantos algarismos escreveu?
28. Um desenhista foi contratado para numerar artisticamente as páginas de um álbum de fotografia, a Cr$ 6,00 por algarismo desenhado. O álbum tem 150 páginas. Quanto deve receber?
29. Se nós contarmos na base 5, quantos objetos formarão uma unidade de 2.ª ordem? Como escreveremos o número 5?
30. Dê 18 traços verticais. Conte os traços na base 4, isto é, formando unidades de diversas ordens grupando de 4 em 4. Escreva o número obtido.

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS:

22) 2 700, 23) 99 900 e 488 700, 24) 189 e 1 136, 25) 303, 26) 877
27) 482 461, 28) Cr$ 2 052,00 29) 5 e 10 30) $102_{(4)}$

2

Adição de números inteiros

16. *Definições*

Um menino possuía 4 livros, e recebeu primeiro 3, depois 2. Quantos livros possui agora ao todo?

Para saber, o menino reúne todos os livros numa só coleção e os conta.

O número de objetos de coleção única denomina-se SOMA.

Os números 4, 3 e 2 são as parcelas.

A operação por meio da qual determinamos a soma, chama-se *adição*.

A *adição* indica-se com o sinal +, que se lê *mais*. Escrevemos:

$$4 + 3 + 2 = 9$$

> **Adição é a operação que tem por fim achar um número que contenha tôdas as unidades de dois ou mais números dados, e sòmente essas.**

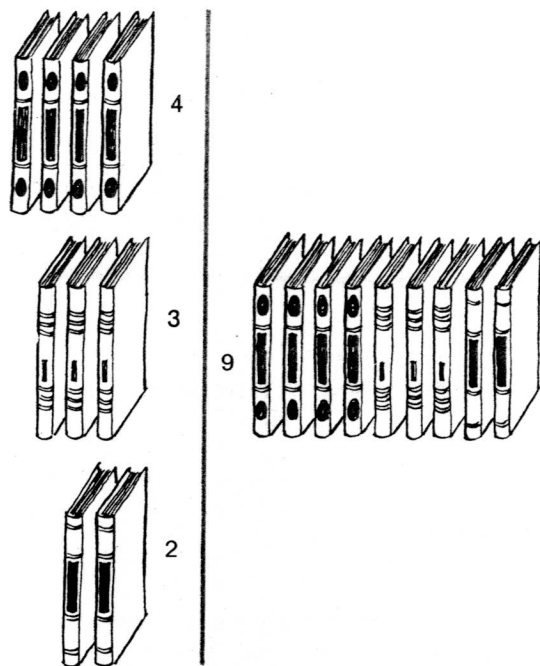



FIG. 8

17. *Sinais de reunião*

Para efetuar a soma $4 + 3 + 2$, somamos primeiro 4 com 3 e, ao resultado somamos 2, o que *indicamos* assim:

$$4 + 3 + 2 = (4 + 3) + 2$$

O parênteses traduz que a soma $4 + 3$ é *suposta efetuada*.

O parênteses ( ) é um **sinal de reunião**. Além do parênteses, usam-se:

colchetes [ ] e chaves { }

Exemplo:

$$4 + 3 + 2 + 5 + 7 \quad \text{(5 parcelas)}$$
$$= (4+3) + 2 + 5 + 7 \quad \text{(4 parcelas)}$$
$$= [(4+3)+2] + 5 + 7 \quad \text{(3 parcelas)}$$
$$= \{[(4+3)+2] + 5\} + 7 \quad \text{(2 parcelas)}$$

18. *Propriedades da adição*

1.ª) ***Propriedade comutativa.*** Se o menino de nosso problema da figura 8, tivesse ganho primeiramente 2 livros e depois 3, ou se possuísse 3 e recebesse 4 e depois 2, ficaria, finalmente, com o mesmo número de livros, assim:

$$4+3+2 = 4+2+3 = 3+4+2.$$

A ordem das parcelas não altera a soma.

Traduz-se esta propriedade dizendo que a soma é **comutativa** (de comutar = trocar, permutar).

2.ª) ***Propriedade associativa.*** Compreende-se ainda fàcilmente que se o menino tivesse recebido os livros ao mesmo tempo, teria ainda a mesma coleção, o que se traduz, escrevendo as duas parcelas correspondentes entre parênteses:

$$4 + 3 + 2 = 4 + (3 + 2)$$

Do mesmo modo:

$$5+3+7+4 = 5+10+4$$

FIG. 9

Não se altera a soma de vários números substituindo duas ou mais parcelas pela sua soma

Traduz-se esta propriedade dizendo que a soma é **associativa** (de associar = juntar).

3.ª) ***Propriedade dissociativa.*** A propriedade dissociativa é inversa da associativa:

$$5+3+7+4 = 5+3+6+1+4$$

Fig. 10

Pode-se substituir uma parcela por uma soma que lhe seja igual.

Do mesmo modo: $4 + (3 + 2) = 4 + 3 + 2$.

19. *Processos de abreviação*

A prática da operação sugere as seguintes abreviações:

1.ª) A soma de duas ou mais parcelas é igual a um número exato de dezenas ou de centenas.

Aplica-se a propriedade associativa. Exemplos:

$8 + 7 + 2$. A soma $8 + 2$ dá uma dezena; a soma é 17.

$36 + 57 + 64 = 36 + 64 + 57 = 100 + 57 = 157$.

2.ª) A decomposição conveniente de uma das parcelas conduz ao caso anterior.

Aplica-se a propriedade dissociativa. Exemplos:

$97 + 35 = 97 + 3 + 32 = 100 + 32 = 132$.

$76 + 38 + 24 = 76 + 4 + 20 + 38 = 100 + 38 = 138$.

20. *Variação da soma*

Se aumentarmos as parcelas a soma *aumenta* e se *diminuirmos* as parcelas a soma diminui.

$$5+2+7+4 > 5+2+7+3$$

Fig. 11

A soma varia no mesmo sentido das parcelas.

21. *Prova da adição*

Chama-se prova a uma segunda operação que se efetua com o fim de verificar a exatidão do resultado da primeira.

Podemos fazer a prova da adição de duas maneiras:

1.ª) Alterando a ordem das parcelas (Prop. comutativa);

2.ª) Reunindo as parcelas em grupos de duas ou mais (Prop. associativa). Exemplo:

	1.ª Prova	2.ª Prova	
4 327	893	4 327	
581	1 247	581	4 908
1 247	581	1 247	
893	4 327	893	2 140
7 048	7 048	7 048	7 048

EXERCÍCIOS

● **Preencha as lacunas:**

1. Se, numa soma de 4 parcelas, somarmos 4 centenas e meia a cada uma das duas primeiras e subtrairmos meia dezena de cada uma das outras, a soma aumentará de .... dezenas.
2. A soma de duas parcelas é 485. Se somarmos 45 dezenas à 1.ª parcela e subtrairmos 6 dezenas da 2.ª, a nova soma será ....
3. A soma de 3 números é igual ao maior número de 5 algarismos diferentes. Se somarmos a cada um o maior número de 3 algarismos, a nova soma será ....
4. Se, numa soma de 3 parcelas, somarmos .... centenas a cada uma, a soma ficará aumentada de 9 milhares.
5. Somei o mesmo número a cada uma das quatro parcelas de uma soma e o total ficou aumentado de 23 centenas. O número somado foi ....
6. Complete as implicações:

$$a+b = a \Longrightarrow b = \ldots\ldots\ldots$$
$$a+b = a + c \Longrightarrow b = \ldots\ldots\ldots$$

● **Sublinhe a sentença certa:**

7. A propriedade aplicada na adição $3+4+5+7 = 3+9+7$ é: a comutativa, a associativa, a dissociativa.
8. A propriedade aplicada em $3+4+5 = 5+3+4$ é: a comutativa, a associativa, a dissociativa.
9. A propriedade aplicada em: $88+22+90 = 88+12+10+90$ foi: a comutativa, associativa, dissociativa.

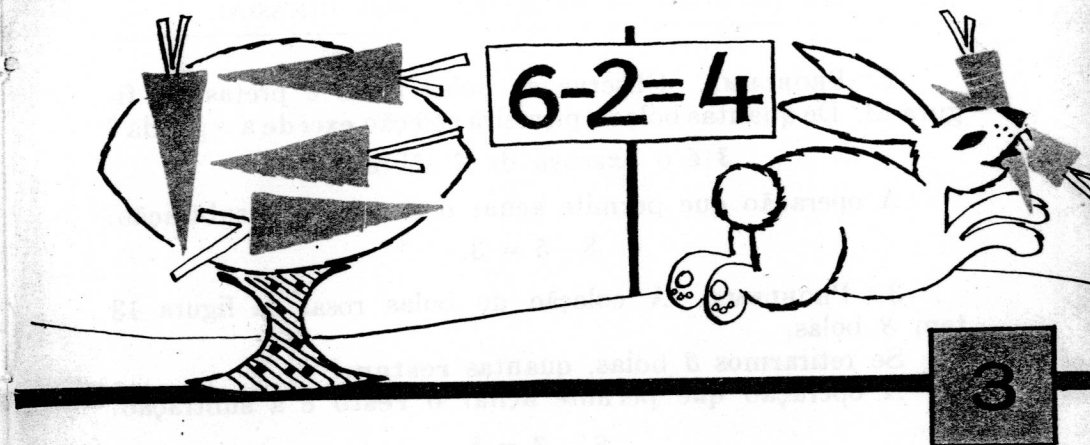
● **Resolva:**

10. Uma soma tem 3 parcelas. Se aumentarmos a 1.ª de 45 unidades e diminuirmos a 2.ª de 36, qual a alteração a fazer na 3.ª parcela para que a soma permaneça a mesma?
11. Subtrai-se o mesmo número de cada uma das 3 parcelas de uma soma e esta ficou diminuída de 450 unidades. Qual o número subtraído?

12. Que alteração sofre a soma $S = a+b$, se aumentarmos a parcela a de 5 unidades e b de 7?
13. Sendo $a+b = 2\,587$, qual será a nova soma se aumentarmos a parcela a de 1 037 unidades e b de 423?
14. Escreva, de todos os modos possíveis, a adição $13+15+27$.
15. Efetue mentalmente as adições, associando as parcelas cuja soma seja um número exato de dezenas ou centenas:

$$13+15+27\,; \quad 88+35+12\,; \quad 36+21+9+64.$$

16. Suprima o parênteses e, em seguida, efetue mentalmente a soma:

$$45+(37+55+13)$$

Subtração de números inteiros

22. *Definições. Resto. Excesso. Diferença*

1.º PROBLEMA. *Tenho uma coleção de 14 selos. Quantos devo juntar para obter uma coleção de 20 selos?*

> **6 é o número que, somado a 14, dá 20.**

O número 6 chama-se **diferença** entre 20 e 14. Escrevemos:

$$6 = 20 - 14 \quad \text{ou} \quad 20 - 14 = 6.$$

A operação por meio da qual achamos a diferença é a **subtração.** 20 (minuendo) e 14 (subtraendo) são os **têrmos** da diferença.

> **Subtração é a operação que tem por fim achar uma parcela, sendo dada a soma (minuendo) e a outra parcela (subtraendo).**

● *A subtração é a operação inversa da adição.*

2.º PROBLEMA. Observe as bolas rosas e pretas da figura 13. De quantas bolas a primeira coleção **excede** a segunda?

3* é o *excesso* de *8* sôbre *5

A operação que permite achar o **excesso** é a subtração:

$$8 - 5 = 3.$$

3.º PROBLEMA. A coleção de bolas rosas da figura 13 tem *8* bolas.

Se retirarmos *3* bolas, quantas **restam?**

A operação que permite achar o **resto** é a subtração:

$$8 - 3 = 5.$$

É claro que se juntarmos as 3 bolas retiradas com as 5 restantes, obteremos as 8 bolas da coleção:

O minuendo é igual à soma do subtraendo com o resto.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) A subtração só é possível quando o subtraendo é *menor* ou *igual* ao minuendo:

$$a - b \text{ é possível se } b \leq a.$$

2.ª) Quando o subtraendo *é igual* ao minuendo a diferença é *zero*

$$a - a = 0$$

23. *Prova da subtração*

Soma-se o subtraendo com o resto; o resultado deve ser o minuendo:

FIG. 12

24. *Propriedades da diferença*

Qual é a diferença entre o número de bolas rosas e de bolas pretas na figura 13? É $8 - 5$.

Juntemos 4 bolas brancas à esquerda de cada coleção, como mostra a figura. Podemos indicar assim a nova diferença:

$$(8 + 4) - (5 + 4)$$

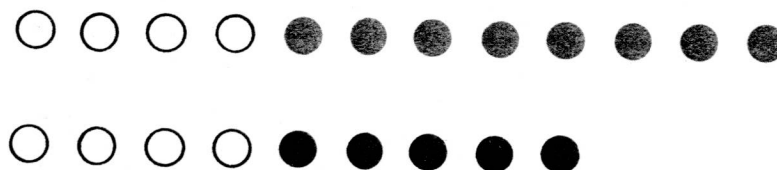



FIG. 13

Depois dessa alteração nas coleções, a diferença ficou modificada?

Então, podemos concluir:

$$8 - 5 = (8 + 4) - (5 + 4)$$

Quando se soma o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo, o resto não se altera.

● *O resto também não se altera se subtrairmos o mesmo número do minuendo e do subtraendo.* Se retirarmos as 4 bolas brancas das coleções da figura 13, a diferença continua a ser 3. Exemplo:

Um pai tem 38 anos e o filho 10 anos. O pai é 28 anos mais velho. Daqui a 10 anos, cada um terá mais 10 anos, e o pai continuará 28 anos mais velho.

OBSERVAÇÃO: Observemos que, se alterarmos só um dos têrmos da subtração, o resto se modificará, variando *no mesmo sentido do minuendo* e no *sentido contrário do subtraendo.*

25. *Aplicações*

- Complete as lacunas:

1. $x - 7 = 3 \Rightarrow x =$ ---------
2. $21 - x = 12 \Rightarrow x =$ ---------
3. $42 - 21 = x \Rightarrow x =$ ---------
4. $a - b = a \Rightarrow b =$ ---------
5. O número que somado com 67 508 dá 108 000 é -----------
6. Se o minuendo de uma subtração fôr 45, a soma do subtraendo com o resto será ---------
7. Se o minuendo de uma subtração fôr 45, a soma do subtraendo, do resto e do minuendo será ---------
8. A soma dos três números que figuram numa subtração vale ------ vêzes o minuendo.
9. Se a soma dos três números de uma subtração for 308, o minuendo será---------
10. Se aumentarmos 20 unidades no minuendo, o resto --------- de ---------- unidades.
11. Se tirarmos 17 unidades do minuendo, o resto --------- de --------- unidades.
12. Se aumentarmos 15 unidades no subtraendo, o resto --------- de --------- unidades.
13. Se tirarmos 3 unidades do subtraendo, o resto --------- de --------- unidades.
14. Se tirarmos 13 do minuendo e aumentarmos 7 no subtraendo, o resto --------- de --------- unidades.
15. Uma pessoa vendeu um apartamento por Cr$ 876 500,00 com um lucro de Cr$ 12 500,00; logo, tinha comprado por Cr$ ------------.

26. *Cálculo com as diferenças*

1.º PROBLEMA. **Subtrair uma soma de um número.**

Tenho 50 cruzeiros e devo pagar três contas de 9 cruzeiros, 5 cruzeiros e 6 cruzeiros, respectivamente. Quanto me restará?

Posso raciocinar de 2 maneiras:

1.ª) Somo as contas a pagar:

$$(9 + 5 + 6) \text{ cruzeiros} = 20 \text{ cruzeiros.}$$

E calculo quanto me restará:

$$50 - (9+5+6) = 50 - 20 = 30.$$

2.ª) Pago uma conta de cada vez:

$$50 - 9 = 41,\ 41 - 5 = 36,\ 36 - 6 = 30.$$

O resultado é o mesmo. Podemos, então, verificar que:

$$50 - (9 + 5 + 6) = 50 - 9 - 5 - 6.$$

1. **Para subtrair uma soma de um número, pode-se subtrair dêsse número sucessivamente cada uma das parcelas.**

2.º PROBLEMA. **Somar uma diferença a um número.**

Paulo tem 120 cruzeiros. Recebe 40 cruzeiros do pai e cede 10 cruzeiros ao irmão. Com quanto fica?

Podemos calcular de duas maneiras:

1.ª) Paulo tira para o irmão 10 cruzeiros dos 40 cruzeiros que recebeu:

$$40 - 10 = 30$$

Terá, finalmente: $120 + 30 = 150$.

Esta maneira de proceder é traduzida pela expressão:

$$120 + (40 - 10)$$

2.ª) Paulo, recebendo 40 cruzeiros, ficará com

$$120 + 40 = 160$$

E, tirando os 10 para o irmão:

$$160 - 10 = 150$$

O resultado é o mesmo. Podemos verificar que:

$$120 + (40 - 10) = 120 + 40 - 10.$$

2. **Para somar uma diferença a um número, pode-se somar o minuendo e depois, subtrair o subtraendo.**

Regra: $n + (a - b) = n + a - b$

(número ↑ adição ↑ diferença)

3.º PROBLEMA. **Subtrair uma diferença de um número.**

Paulo tem 120 cruzeiros. Seu irmão, para comprar um caderno, precisa de 50 cruzeiros, mas já possui 10 cruzeiros e pede a Paulo para lhe fornecer o resto. Com quanto ficará Paulo?

1.ª) Quantos cruzeiros Paulo deve dar ao irmão:

$$50 - 10 = 40$$

Quantia com que Paulo ficará: $120 - 40 = 80$

Esta maneira de proceder é traduzida pela expressão:

$$120 - (50 - 10)$$

2.ª) O irmão dá a Paulo os 10 cruzeiros que possui. Paulo passa a ter: $120 + 10 = 130$

Em seguida, Paulo compra o caderno para o irmão, e lhe restarão : $130 - 50 = 80$

O resultado é o mesmo. Podemos verificar que:

$$120 - (50 - 10) = 120 + 10 - 50$$

3. **Para subtrair uma diferença de um número pode-se somar a êste número o menor e, depois, subtrair o maior.**

Observe que a segunda maneira de proceder é a mais natural se os 120 cruzeiros de Paulo constarem de 2 notas de 50 e uma de 20, por exemplo.

Regra:

27. *Polinômios aritméticos*

Polinômio aritmético é uma sucessão de adições e subtrações (supostas possíveis). Exemplo:

$$27 - 16 + 8 - 3.$$

O primeiro têrmo e os precedidos do sinal +, são denominados **aditivos** ou **positivos.** São 27 e 8, no nosso exemplo.

Os têrmos precedidos do sinal −, como 16 e 3 no nosso exemplo, são denominados **subtrativos** ou **negativos.**

Suponha que um colega lhe deu 27 selos, depois retomou 16, lhe deu novamente 8 e, enfim retomou 3. O seu número de selos será traduzido pelo polinômio:

$$27 - 16 + 8 - 3 = 11 + 8 - 3 = 19 - 3 = 16.$$

Se o colega lhe desse 27 e depois mais 8, lhe daria ao todo:

$$27 + 8 = 35$$

e se, em seguida retomasse sucessivamente 16 e 3, retomaria ao todo:

$$16 + 3 = 19$$

Finalmente lhe restariam

$$(27 + 8) - (16 + 3) = 16 \text{ selos.}$$

O resultado é o mesmo. Assim, verificamos que:

$$27 - 16 + 8 - 3 = (27 + 8) - (16 + 3).$$

Para calcular um polinômio aritmético, pode-se efetuar a soma dos têrmos aditivos e a dos subtrativos e, finalmente, subtrair a segunda soma da primeira.

Exemplo:

$$33 - 15 - 9 + 4 - 7 = (33 + 4) - (15 + 9 + 7) = 37 - 31 = 6.$$

28. *Como suprimir parênteses*

O valor de um polinômio aritmético com têrmos positivos e negativos, é uma diferença, como vimos no n.º 27.

Assim, de acôrdo com as regras de cálculo com as diferenças, podemos concluir as duas regras para suprimir parênteses:

1.ª) $15 + (8 - 7 + 3) = 15 + 8 - 7 + 3$ (conservam-se os sinais)
2.ª) $15 - (8 - 7 + 3) = 15 - 8 + 7 - 3$ (trocam-se os sinais)

29. *Aplicações*

- Calcule o valor dos polinômios aritméticos:

1) $401 - 98 + 510 - 890 + 77$ 2) $71 - 81 + 246 - 23 + 111$
3) $287 - 93 - 45 - 47$ 4) $25 + (32 - 5) - (57 + 10 - 15)$

Calcule, de duas maneiras (uma delas suprimindo os parênteses):

5) $327 + (5 - 246) - (3 + 8 - 17)$ 6) $401 - 249 - (101 - 90)$
7) $287 - (93 + 45) - [45 - (7 - 9)]$ 8) $71 - (181 - 246) + (4 - 23 + 107)$

Respostas: 1. 0 2. 324 3. 102 4. 0 5. 92 6. 141 7. 102 8. 224

30. *Cálculo mental. Uso dos complementos*

Complemento aritmético de um número é o que falta a êsse número para completar *uma unidade* de ordem imediatamente superior.

O complemento de 97 é 3 (o que falta para 100)

O complemento de 981 é 19 ($981 + 19 = 1000$).

O uso do complemento permite efetuar mentalmente certas subtrações, onde o complemento do subtraendo é um número pequeno.

Seja a subtração: $2583 - 97$.

Em lugar de subtrair 97, somo 3 (complemento) e subtraio 100:

$$2583 + 3 = 2\,586$$

Assim: $2583 - 97 = 2\,486$

A subtração $2\,371 - 981$ efetua-se:

$$2\,371 + 19 = 2\,390, \text{ logo: } 2\,371 - 981 = 1\,390.$$

31. *Aplicações*

- Efetue mentalmente, útilizando os complementos:

a. $481 - 98$ b. $246 - 81$ c. $287 - 93$

EXERCÍCIOS DA SUB-UNIDADE

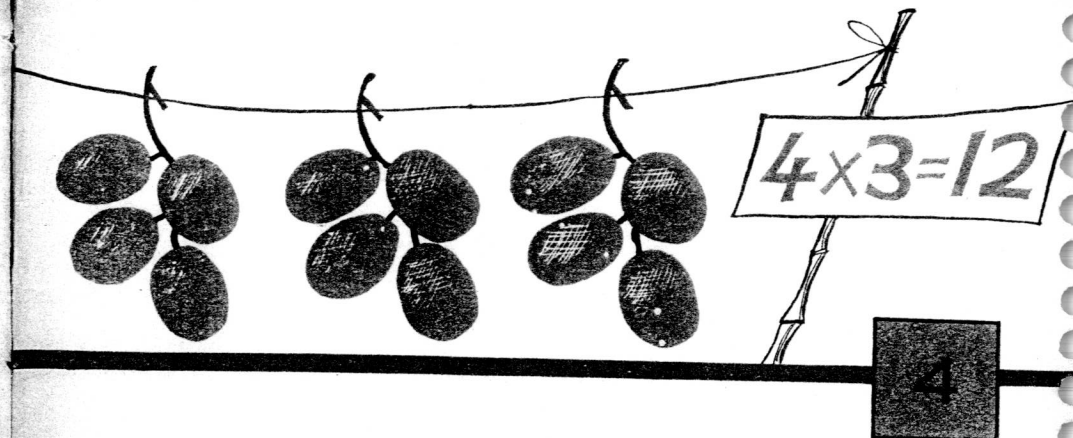
- **Preencha as lacunas:**

1. **Se aumentarmos 20 unidades no minuendo e 3 no subtraendo, o resto ficará .... de .... unidades.**
2. **Se tirarmos 14 unidades no minuendo e 18 no subtraendo, o resto ficará .... de ....**

3. Se, numa subtração, somarmos meia centena ao minuendo e meio milhar ao subtraendo, o resto ficará .... de .... unidades.
4. Se a diferença entre dois números foi 122 e o maior 396, o menor será ....
5. A diferença entre dois números ficou igual a 3 243, depois que somei 5 unidades ao maior e 500 ao menor. A diferença primitiva era ....

● **Resolva os problemas:**

6. Arquimedes nasceu no ano 287 a. C. e morreu no ano 212 a. C. Quantos anos viveu?
7. O grande matemático brasileiro Amoroso Costa faleceu em 1928, aos 43 anos. Em que ano nasceu?
8. A soma dos três números que figuram numa subtração é 31 668. O resto é 3 520. Achar o minuendo e o subtraendo.
9. Dois barris de óleo têm juntos 945 litros. Se tirarmos 140 litros do primeiro e 125 litros do segundo, os dois barris ficarão com quantidades iguais. Quantos litros tem cada um?
10. A soma de dois números é 35 e a diferença 5. Achar os dois números.
11. Carlinhos comprou um lápis e um caderno por Cr$ 60,00. O lápis é Cr$ 50,00 mais barato. Quanto custou cada objeto?

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS: 6. 75 7. 1 885 8. 15 834 e 12 31 9. 480 e 465 10. 20 e 15 11. Cr$ 5,00 e Cr$ 55,00.

Multiplicação e potenciação de inteiros

32. *Produto de dois números inteiros. Multiplicação*

Paulo ganhou 3 envelopes com 5 selos cada um. Quantos selos ganhou?

Se nós contarmos por adição, o número de selos será:

5 selos + 5 selos + 5 selos = 15 selos.

Esta soma apresenta uma particularidade: *tôdas as parcelas são iguais.*

Neste caso, a soma chama-se **produto.**

Convenciona-se indicá-la: 5 selos × 3.

E lê-se: *5 selos multiplicados por 3*

ou, também, *3 vêzes 5 selos.*

A parcela repetida, 5 selos, é o **multiplicando.**

O número de parcelas, 3, é o **multiplicador.**

O multiplicando e o multiplicador chamam-se **fatôres** do produto.

Produto de dois números inteiros é a soma de tantas parcelas iguais ao multiplicando quantas são as unidades do multiplicador.

A operação que permite achar o produto chama-se **multiplicação.**

OBSERVAÇÃO: *Só um dos fatôres de um produto pode ser um número concreto.* O multiplicador *é sempre abstrato, indica apenas quantas vêzes.*

33. *Multiplicações particulares*

1.ª) $1 \times 3 = 1 + 1 + 1 = 3$

$1 \times 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

2.ª) $0 \times 5 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

3.ª) Os números 1 e 0 não têm sentido como multiplicadores; convenciona-se, todavia, considerá-los:

5×1; o número 5 foi tomado uma vez

$$5 \times 1 = 5$$

5×0; o número 5 não foi tomado nenhuma vez

$$5 \times 0 = 0$$

Podemos concluir:

● *Quando um dos fatôres é igual a um, o produto é o outro fator.*

Assim: $1 \times 7 = 7$; $8 \times 1 = 8$; $a \times 1 = a$

● *Quando um dos fatôres é zero, o produto é igual a zero.*

Assim: $0 \times 9 = 0$; $6 \times 0 = 0$; $a \times 0 = 0$

34. *Propriedade do produto de dois números*

Observe o cartão com 12 botões, como são vendidos nas lojas.

1.º) Se contarmos os botões pelas linhas, verificaremos que há 4 linhas de 3 botões cada uma:

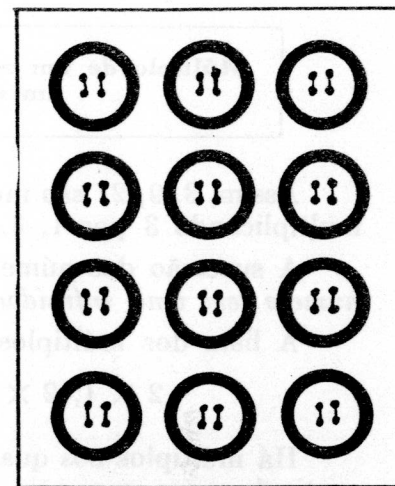
$3 + 3 + 3 + 3$ ou 3×4

2.º) Se contarmos pelas colunas, verificaremos que há 3 colunas de 4 botões cada uma:

$4 + 4 + 4$ ou 4×3

FIG. 14

Verificamos que:

$$3 \times 4 = 4 \times 3$$

ou **A ordem dos fatôres não altera o produto**

● A ***multiplicação*** *de dois números é* ***comutativa.***

35. *Prova da multiplicação*

Para verificar o resultado da operação, invertemos a ordem dos fatôres e efetuamo-la novamente. O resultado deve ser o mesmo, em virtude da propriedade comutativa. Exemplo:

Multiplicação	*Prova*
381 43 1 143 1 524 16 383	43 381 43 344 129 16 383

36. *Múltiplos de um número inteiro*

Múltiplo de um número é o produto dêle por um número natural

Assim, 3, 9, 27 são múltiplos de 3, pois podem ser obtidos multiplicando 3 por 1, 3, 9.

A sucessão dos números naturais é ilimitada; logo, todo *número tem uma infinidade de múltiplos.*

A lista dos múltiplos de 2 é ilimitada:

$$2 \times 1,\ 2 \times 2,\ 2 \times 3,\ 2 \times 4 \text{ etc.}$$

Há múltiplos aos quais se dá, na linguagem usual, nomes particulares:

27×2 – é o *dôbro* de 27; 5×2 é o *dôbro* de 5 etc.
27×3 – é o *triplo* de 27; 6×3 é o *triplo* de 6 etc.
9×4 – é o *quádruplo* de 9; 8×4 é o quádruplo de 8 etc.

E, assim, diz-se o *quíntuplo*, o *sêxtuplo*, o *sétuplo*, o *óctuplo*, o *nônuplo*, o *décuplo*, etc. Exemplos:

1) O quíntuplo de 16 é $16 \times 5 = 80$.
2) O número cujo quádruplo é 28 é 7.

37. *Aplicações*

- **Preencha as lacunas:**

1. A soma 5+5+5+5+5+5 com a forma de multiplicação escreve-se.........
2. O produto $a \times 6$ com a forma de soma de parcelas iguais a a escreve-se............

3. $7 \times 3 =$ .... + ... + ... ;
   $8 + 8 + 8 + 8 =$ .... $\times$ ....
4. Se a não for zero $a \times b = a \Rightarrow b =$ ....
5. Os três menores múltiplos de 107 são ....
6. Os múltiplos de 45 compreendidos entre 100 e 200 são ....
7. O produto de 7 milhares e meio por 200 contém .... centenas.
8. A soma do quádruplo de um número com o próprio número é o .... do número.
9. Se um número é o sêxtuplo de outro, a diferença será o .... dêsse outro.
10. Se a soma de dois números é o quádruplo do menor, o maior é o...... do menor.

- Calcule as expressões:

11. $49 + 7 \times 36$
12. $(246 - 11) \times 3 - 12 \times 5 + 5$
13. $81 - 5 \times 8$
14. $37\,(38 + 425)$
15. Efetue o produto de 36 por 22 de duas maneiras.

RESPOSTAS: 11. 301 12. 650 13. 41 14. 17 131.

38. *Multiplicação de vários fatôres*

Produto de vários fatôres é o número que se obtém multiplicando o primeiro fator, à esquerda, pelo segundo, em seguida o produto obtido pelo terceiro e assim por diante, até o último fator.

Exemplo.

$$3 \times 4 \times 2 \times 5 = 12 \times 2 \times 5 = 24 \times 5 = 120,$$

que se pode indicar: $3 \times 4 \times 2 \times 5 = [(3 \times 4) \times 2] \times 5.$

39. *Propriedades da multiplicação*

1.ª) ***Propriedade associativa:*** *Quantos botões existem em 2 cartões iguais aos da fig.* 14.

Podemos contá-los de modos diferentes.

1.º) Calculamos o número de botões de *um cartão*: 4×3

E, depois, o de 2 cartões:

$$4 \times 3 \times 2.$$

2.º) Em 1 cartão há 3 *fileiras*. Logo, o número de fileiras de 2 cartões, será:

$$3 \times 2 = 6$$

Como há 4 botões em cada fileira, o número de botões será: 4×6 ou $4 \times (3 \times 2)$.

Podemos verificar que:

$$4 \times 3 \times 2 = 4 \times (3 \times 2)$$

Pode-se substituir dois fatôres pelo seu produto efetuado.

Exemplo:

$$5 \times 31 \times 2 \times 7 = 31 \times 10 \times 7$$

- A propriedade inversa é a **dissociativa:**

Pode-se substituir um fator por um produto que lhe seja igual. Exemplo:

$$31 \times 10 \times 7 = 31 \times 2 \times 5 \times 7.$$

2.ª) ***Propriedade comutativa:*** Para dois fatôres a propriedade já foi estudada (pág. 51)

$$4 \times 3 = 3 \times 4$$

Portanto, podemos concluir:

$$2 \times (4 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 4) \times 5$$

e, aplicando a propriedade dissociativa:

$$2 \times 4 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

Podemos, assim, *mudar a ordem de dois fatôres consecutivos.*

Podendo trocar a posição de dois fatôres consecutivos, é possível modificar de um modo qualquer a ordem de todos os fatôres. Exemplo:

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 4 = 2 \times 5 \times 3 \times 4 \text{ etc.}$$

Você verificou que:

$$3 \times 4 \times 5 = 3 \times 5 \times 4.$$

3.ª) ***Propriedade distributiva:***

a) *Em relação à adição.*

Vamos contar os tijolos do murinho ao lado de duas maneiras

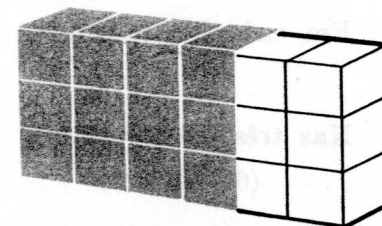



FIG. 15

1.ª CONTAGEM	2.ª CONTAGEM
Em uma fileira há 4 tijolos rosas e 2 brancos: $4 + 2$	Número de tijolos rosas: 4×3
Nas 3 fileiras haverá ao todo: $(4 + 2) \times 3$	Número de tijolos brancos: 2×3
	O total de tijolos é: $4 \times 3 + 2 \times 3$

Concluimos que: $(4 + 2) \times 3 = 4 \times 3 + 2 \times 3$

Para multiplicar uma soma por um número, pode-se multiplicar cada uma das parcelas e somar os resultados.

Exemplo: $(4 + 3 + 5) \times 2 = 8 + 6 + 10 = 24.$

Esta propriedade chama-se **distributiva** porque o fator *é distribuído pelas parcelas.*

b) *Em relação à subtração.*

Se do murinho da figura 15 *tirarmos os tijolos brancos, quantos restarão?*

Podemos calcular de duas maneiras.

1.º RACIOCÍNIO

Em cada fila restam

$6 - 2$

Nas três filas, restarão

$(6 - 2) \times 3$

2.º RACIOCÍNIO

Quantos tijolos há, ao todo?

6×3

Quantos tijolos brancos tiramos, se suprimimos 2 de cada fila?

2×3

logo restam:

$6 \times 3 - 2 \times 3$

Concluimos que: $(6 - 2) \times 3 = 6 \times 3 - 2 \times 3$

Para multiplicar uma diferença por um número, pode-se multiplicar cada um dos têrmos e subtrair os resultados.

Exemplo: $(25 - 13) \times 4 = 100 - 52 = 48.$
$(25 - 13) \times 4 = 12 \times 4 = 48.$

RESUMO DAS PROPRIEDADES

$abc = acb = bac = bca$	------ comutativa
$abc = a \times (bc)$	------ associativa
$(a+b) \times n = an + bn$ $(a-b) \times n = an - bn$	------ distributiva.

40. *Aplicações*

- Indique a ordem em que devem ser feitos os seguintes cálculos e, em seguida, efetue:

1. $7 \times 6 + 5$ 2. $7 \times (6 + 5)$ 3. $(7 + 6) \times 5$ 4. $7 + 6 \times 5$
5. $18 \times 4 - 3$ 6. $18 \times (4 - 3)$ 7. $(18 - 4) \times 3$ 8. $18 - 4 \times 3$.

- Utilize as propriedades comutativa e associativa (ou dissociativa), para efetuar mentalmente os seguintes cálculos:

[*Modêlo:* $140 \times 20 = (14 \times 10) \times (2 \times 10) = (14 \times 2) \times (10 \times 10) = 2\,800$].

9. $2 \times 27 \times 5$ 10. $6 \times 5 \times 7 \times 2$ 11. 45×22].

- Efetue mentalmente, decompondo um dos fatôres numa soma ou diferença:

[*Modêlo:* $13 \times 12 = 13 \times (10+2) = 130+26=156$].

13. 32×12 13. 24×99 14. 42×102.

- Sublinhe a sentença certa:

15. A propriedade aplicada na multiplicação $3 \times 4 \times 5 \times 7 = 3 \times 20 \times 7$ é: a comutativa, a associativa, a distributiva.
16. Somando 3 unidades ao fator a da multiplicação $a \times b$ o produto aumenta de: 3 unidades, $3 \times b$ unidades, $3 \times a$ unidades.
17. Subtraindo 4 unidades do fator b da multplicação $a \times b$ o produto diminui de: 4 unidades, $4a$ unidades, $4b$ unidades.
18. A propriedade aplicada em: $3 \times 4 \times 5 = 5 \times 3 \times 4$ é a: comutativa, associativa, distributiva.

- Preencha as lacunas:

19. Numa multiplicação o multiplicando é 430. Se subtrairmos 3 unidades ao multiplicador o produto diminuirá de -------- unidades.
20. Numa multiplicação o multiplicando é 36. Somando 3 unidades ao multiplicador, o produto aumentará de -----------

41. *Potências de expoente inteiro*

Um produto de fatôres iguais, como

$$3 \times 3 \times 3 \times 3$$

representa-se de modo abreviado por intermédio de uma nova operação: a **potenciação,** e apenas com dois números:

3 — valor dos fatôres iguais — chama-se **base**
4 — número de fatôres — chama-se **expoente**

Para indicá-la com êsses dois números escreve-se a base e à direita e ao alto, com tipo menor, o expoente:

$$3^4$$

lê-se: *três elevado a quatro* ou *três elevado à quarta potência* ou, ainda *quarta potência de três.*

Potência, de expoente inteiro, de um número é um produto de fatôres iguais ao número.

Exemplos:

$$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 343$$
$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$
$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) A segunda potência chama-se também *quadrado*, porque a área do quadrado obtém-se elevando-se a medida do lado à segunda potência.

A terceira potência, chama-se também *cubo* porque o volume do cubo se obtém elevando à terceira potência a medida de sua aresta.

2.ª) Em virtude da definição, o expoente deve ser maior ou, no mínimo, igual a 2, pois não há multiplicação com menos de dois fatôres.

Convenciona-se, no entanto, considerar potências de expoente 1, cujo valor é, por definição, igual à base. Exemplos:

$$27^1 = 27$$
$$5^1 = 5$$

3.ª) Tôda potência de 1 é igual a 1:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$
$$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

4.ª) Tôda potência de zero é igual a zero.

5.ª) As potências de 10 são as unidades de diversas ordens e obtêm-se, escrevendo à direita da unidade tantos zeros quantas são as unidades do expoente:

$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100.$$
$$10^3 = 1\,000$$

42. *Multiplicação de potências da mesma base*

Seja multiplicar 2^4 por 2^2.
Por definição, temos:

$$2^4 \times 2^2 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ fatôres}} \times \underbrace{2 \times 2}_{2 \text{ fat.}}$$

logo, o produto terá 4 + 2 ou 6 fatôres, isto é,

$$2^4 \times 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$$

O produto de potências da mesma base obtém-se conservando a base e somando os expoentes.

Exemplos:

1.º) $3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$

2.º) $7^3 \times 7^4 = 7^7$

Nas expressões, efetuam-se em primeiro lugar as potências:

$$5 + 2 \times 3^2 - 7 = 5 + 2 \times 9 - 7 = 5 + 18 - 7 = 16.$$

43. *Aplicações*

- Calcule:

1) 34^2 4) 100^3 7) $2^6 : 4^2$ 10) $3^2 - 2^3$

2) 5^4 5) 16^3 8) $4^4 : 2^3$ 11) $3^3 \times 2^2$

3) 2^5 6) 3^4 9) $2^3 + 3^4$ 12) $7 + 2 \times 5^2 - 18 : 3^2$

13) Indique com a forma de potência: 2×2; $3\times3\times3$; $6\times6\times6\times6\times6\times6$; $7\times7\times7\times7$.

14) Escreva com a forma de uma potência única: $7^5 \times 7^3$; $8^2 \times 8^3 \times 8^4$; $3^5 \times 3^2$.

EXERCÍCIOS DA SUB-UNIDADE

- **Preencha as lacunas:**

1. Se a diferença entre dois números é o quádruplo do menor, o maior é .... do menor.
2. Se multiplicarmos um número por 5, êle aumenta de seu ....
3. O número que, multiplicado por 7, aumenta de 276 unidades é ....
4. O produto de dois números é 918. Se multiplicarmos o primeiro por 4 e o segundo por 5, o novo produto será ....
5. O produto de dois números é 360. Se multiplicarmos um dos fatôres por 5, o produto ficará aumentado de ....
6. Somei 5 unidades ao multiplicando e o produto aumentou 4 dezenas. O multiplicador é ....
7. Se somarmos 8 unidades ao fator x do produto $x \times 7$, o produto aumentará .... unidades.
8. Se subtrairmos 6 unidades do fator x do produto $7 \times x$, o produto diminuirá ....

- **Calcule as expressões:**

9. $4 \times (9 \times 4 - 33) - (16 - 3 \times 4) \times 3$
10. $27^2 - (6 \times 9 - 3 \times 17)8 + 4 \times 3$
11. $3 + 4(5^2 - 2^3) - 17$
12. $17 - 14(4^2 - 15) + 21$

- **Resolva os problemas:**

13. Um relógio dá 156 pancadas por dia, assinalando apenas as horas. Quantas pancadas dará por mês?
14. Efetuar a multiplicação 345×287. Olhando apenas as operações, dizer o preço de 7 objetos a 345 cruzeiros e de 200 objetos a 345 cruzeiros.
15. Quantos algarismos são utilizados na paginação de um livro de 231 páginas?
16. O produto de dois números é 594. Se subtrairmos 5 unidades do multiplicando o produto torna-se igual a 429. Quais são os dois números?
17. O produto de dois números é 156. Somando 7 unidades ao maior o produto tornar-se-á 240. Achar os dois fatôres.
18. Dois trens partem no mesmo instante de duas estações situadas a 400 km uma da outra e se dirigem em sentidos contrários. O primeiro tem a velocidade de 50 km por hora e o segundo de 65km por hora. Qual a distância entre os dois no fim de 2 horas? E no fim de 4 horas?
19. Lucy deu Cr$ 2,00 a cada um dos oito pobres que encontrou ao sair da Igreja e ficou com Cr$ 23,00. Com quanto ficaria se tivesse dado Cr$ 2,50 a cada um?
20. Um ciclista persegue um pedestre que leva 20 km de distância. O ciclista percorre 11km por hora e o pedestre, 4km no mesmo tempo. Qual a distância entre os dois no fim de 2 horas?

RESPOSTAS:

9. 0 10. 717 11. 54 12. 24

13. 4680 14. Cr$ 2 415,00 e Cr$ 69 000,00 15. 585 16. 33 e 18

17. 13 e 12 18. 170 km e 60 km 19. Cr$ 19,00 20. 6 km.

Divisão de números inteiros

44. *Divisor de um número*

Formemos a lista dos *múltiplos* de *6:*

6, 12, 18, 24, 36, . . .

O número *72* figurará nesta lista?

Se continuarmos a escrever aquela lista, verificaremos que

$$6 \times 12 = 72$$

72 é um múltiplo de 6.

Diz-se também que 6 é **divisor** de 72

$$72 = 6 \times 12 \quad \Big| \begin{array}{l} \textit{72 é múltiplo de 6} \\ \textit{6 é divisor de 72} \end{array}$$

● ***Dizer que 72 é múltiplo de 6 é o mesmo que dizer que 6 é divisor de 72.***

Observação: O divisor chama-se também sub-múltiplo.

Exemplo: Forme a lista dos múltiplos de 36 e verifique se 36 é **divisor** de 252.

A igualdade 252 = 36 × 7, quantos **divisores** de 252 nos fornece?

45. *Divisão exata. Quociente*

Tenho 36 selos do Império do Brasil para repartir igualmente entre 9 meninos. Qual a parte de cada um?

Se der 1 a cada um, distribuirei: $9 \times 1 = 9$
Se der 2 a cada um, distribuirei: $9 \times 2 = 18$
Se der 3 a cada um, distribuirei: $9 \times 3 = 27$

Se der 4 a cada um, distribuirei: $9 \times 4 = 36$

Assim, a parte de cada um será de 4 selos.

O problema foi possível porque **36 é múltiplo de 9.**

A operação feita assim chama-se **divisão exata.** Os dados da operação são:

O número de selos (36) chama-se **dividendo.**

O número 9 chama-se **divisor.**

O resultado 4, chama-se **quociente exato.**

Para indicar a operação escreve-se:

$$36 : 9 = 4$$

O símbolo (:) escrito na igualdade é de **divisão exata.** Só deve ser usado quando houver **quociente exato.**

Divisão exata é a operação que tem por fim, dados dois números, achar o número que multiplicado pelo segundo dá o primeiro.

Exemplo: $252 : 36 = 7$ porque $36 \times 7 = 252$.

As igualdades:

$$D : d = q \quad \text{e} \quad D = d \times q$$

são equivalentes.

A relação:

$$D = d \times q$$
$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{quociente}$$

é a **relação fundamental da divisão exata.**

46. *Casos particulares*

1.º) *Quando o divisor é 1*, o quociente é igual ao dividendo:

$$a : 1 = a \quad \text{porque} \quad 1 \times a = a$$

2.º) *Quando o dividendo e divisor são iguais*, o quociente é 1:

$$a : a = 1 \quad \text{porque} \quad a \times 1 = a$$

3.º) *Quando o dividendo é zero*, o quociente é zero:

$$0 : a = 0 \quad \text{porque} \quad a \times 0 = 0$$

4.º) *Quando o divisor é zero*, a divisão é **impossível:**

$a : 0$ é impossível, porque não há número que multiplicado por zero dê a.

47. *Propriedades da divisão exata*

PRIMEIRA PROPRIEDADE: **Propriedade distributiva.**

1.º PROBLEMA. *Dois meninos compram dois envelopes de selos em uma casa filatélica; o primeiro com 30 selos e o segundo com 20. Se repartirem os selos igualmente, quantos tocarão a cada um?*

RESOLUÇÃO

Primeiro raciocínio	*Segundo raciocínio*
Os meninos podem juntar os selos dos dois envelopes e, depois, repartir o total. Cada um receberá:	Os meninos podem repartir entre si os selos de cada envelope. Cada um receberá:
$(30+20) : 2 = 25$	$30 : 2 + 20 : 2 = 25$

$$(30 + 20) \div 2 = 30 \div 2 + 20 \div 2$$

Conclui-se a *propriedade distributiva* em **relação à adição:**

Para dividir uma soma, cujos têrmos são múltiplos do divisor, pode-se dividir cada uma das parcelas e somar os quocientes.

$$(45+18) : 9 = 45 : 9 + 18 : 9 = 5 + 3 = 8$$

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Podemos utilizar esta propriedade em cálculo mental:

$$91 : 7 = (70 + 21) : 7 = 10 + 3 = 13$$

2.ª) Se escrevermos a igualdade do problema do segundo para o primeiro membro:

$$30 : 2 + 20 : 2 = (30 + 20) : 2$$

concluiremos:

- ***Se um número divide todos os têrmos de uma soma, divide também a soma.***

ou, o que é o mesmo:

- ***A soma de múltiplos de um número é um múltiplo dêsse número.*** Exemplos:

33 e 55 são múltiplos de 11. A soma, 88, é também um múltiplo de 11. Os multiplicadores são 3, 5 e $3 + 5 = 8$, "A soma do *triplo* de 11 com o *quíntuplo* é o *óctuplo* de 11".

2.º PROBLEMA. *Paulo, viajando para uma casa comercial, recebeu 15 diárias, num total de Cr$ 30 000,00 e gastou no hotel, pelos 15 dias de hospedagem, Cr$ 24 000,00. Quanto economizou por dia?*

RESOLUÇÃO

Primeiro raciocínio	*Segundo raciocínio*
Calculamos a economia total:	Calculamos *uma* diária:
$30\,000 - 24\,000 = 6\,000$	$30\,000 : 15 = 2\,000$
E, em seguida, à economia por dia:	e a despesa por dia:
$(30\,000 - 24\,000) : 15 = 400$	$24\,000 : 15 = 1\,600$
	Economiza por dia a diferença:
	$30\,000 : 15 - 24\,000 : 15 = 400$

$$(30\,000 - 24\,000) : 15 = 30\,000 : 15 - 24\,000 : 15$$

Conclui-se a *propriedade distributiva* em **relação à subtração:**

Para dividir uma diferença, cujos têrmos são divisíveis pelo divisor, pode-se dividir cada um dos têrmos e subtrair os quocientes.

$$(45 - 18) : 9 = 45 : 9 - 18 : 9 = 5 - 2 = 3$$

Podemos utilizar a propriedade em cálculo mental. Exemplo:

$$180 : 5 = (200 - 20) : 5 = 40 - 4 = 36.$$

SEGUNDA PROPRIEDADE: **Divisão de um produto por um número.**

PROBLEMA. *Uma senhora compra dois pacotes de 20 bombons cada um para distribuir igualmente por seus 4 filhos. Quantos receberá cada filho?*

RESOLUÇÃO

A senhora poderá distribuir os bombons de duas maneiras:

Primeiro raciocínio

Reúne os bombons. Como são 2 pacotes de 20, o total será:

$$20 \times 2$$

Em seguida, divide o total pelos meninos. Cada um receberá:

$$(20 \times 2) : 4$$

Segundo raciocínio

Divide os bombons de cada pacote pelos 4 meninos. De cada pacote recebem:

$$20 : 4$$

Como são 2 pacotes, cada um receberá *duas vêzes:*

$$(20 : 4) \times 2$$

Conclui-se: $(20 \times 2) : 4 = (20 : 4) \times 2$

Para dividir um produto por um número basta dividir um dos fatôres.
(Supõe-se, bem entendido, que exista um fator divisível pelo n.º).

Observemos que como 4 é divisor de 20, é também divisor de 20×2.

Isto é:

- ***Todo divisor de um número é divisor dos múltiplos dêsse número.*** Exemplos:

$$(4 \times 35 \times 8) : 7 = 4 \times (35 : 7) \times 8 = 4 \times 5 \times 8 = 160$$

$$(23 \times 18 \times 3) : 18 = 23 \times (18 : 18) \times 3 = 23 \times 3 = 69$$

Observação: No segundo exemplo, observamos que *para dividir um produto por um dos fatôres, basta suprimir êste fator.*

Terceira propriedade: **Divisão de um número por um produto.**

Problema. *Duas senhoras, cada uma com 3 filhos, compram juntas 24 maçãs para distribuir igualmente entre êles. Quantas receberá cada um?*

RESOLUÇÃO

As senhoras podem proceder de *duas* maneiras:

Primeiro raciocínio

Reunem todos os meninos. São:

$$2 \times 3 = 6$$

Em seguida, dividem as 24 maçãs pelo total de meninos e cada um receberá:

$$24 : (2 \times 3) = 4$$

Segundo raciocínio

Cada uma fica com a parte do seus filhos. Cada senhora terá:

$$24 : 2 = 12$$

Em seguida cada uma divide a parte que lhe tocou pelo seus 3 filhos. Cada um receberá:

$$(24 : 2) : 3 = 4$$

Conclui-se: $24 : (2 \times 3) = (24 : 2) : 3$

Para dividir um número por um produto, pode-se dividí-lo pelo primeiro fator, o resultado pelo segundo, e assim, por diante.

Exemplo: Seja dividir 720 por $4 \times 3 \times 5$.

Fazemos: $720 : 4 = 180$; $180 : 3 = 60$, $60 : 5 = 12$.

A propriedade aplica-se em *cálculo mental:*

$$360 : 24 = 360 : (3 \times 4 \times 2)$$

$$360 : 3 = 120, \quad 120 : 4 = 30; \quad 30 : 2 = 15.$$

48. *Aplicações*

- Preencha as lacunas:

1. 225 × .... = 90 900
2. Os produtos de dois números naturais que dão 12 são: ....
   Logo, os divisores de 12 são ....
3. Escreva todos os produtos de dois números naturais que dão 6. Daí conclua que os divisores de 6 são ....
4. Da igualdade 560 = 35 × 16, concluem-se as duas divisões exatas .... e ....
5. 36 : 36 = ... 36 : .... = 36
6. Entre as operações seguintes:
   4 × 0 + 15, 3 × 2 - 7, 0 + 5 × 7, 0 : 8 e 8 : 0
   as duas impossíveis são ....

- Efetue de duas maneiras diferentes

7. (45+30):15 8. (120+60):12 9. (45 - 30):5 10. (55 - 44):11
11. (32×17×9):8 12. (38×7×5):38 13. 150:(6×5) 14. 156:(3×13)

- Preencha as lacunas:

15. O produto de 360 por 150 é igual ao produto de 225 por ....
16. Devo multiplicar 30 por ...... para que o produto fique contido 4 vêzes em 2 400.
17. O quociente exato de uma divisão é 150. Se multiplicarmos o dividendo por 100 e o divisor por 1 000, o novo quociente será ....
18. Ao quádruplo de um número somei 520 e obtive o sêxtuplo. O número é ....
19. O número que, multiplicado por 6, aumenta 845 unidades é ....

49. *Divisão aproximada. Quociente inteiro. Resto*

PROBLEMA. *Fernando tem 26 cruzeiros. Quantos pacotes de bala, de 8 cruzeiros cada um, poderá comprar?*

Quanto lhe sobrará depois que comprar 1 pacote? E depois que comprar 2? E depois que comprar 3?

Após comprar o 3.º pacote, restar-lhe-ão 2 cruzeiros e nenhum mais poderá comprar.

Poderá, pois, comprar 3 pacotes.

3 é o *quociente inteiro* ou a *menos de uma unidade* do dividendo 26 pelo divisor 8; 2 é o **resto.**

Esta divisão não se exprime por um símbolo e sim por uma igualdade:

$$\underset{\text{dividendo}}{26} = \underset{\text{quociente}}{3} \times \underset{\text{divisor}}{8} + \underset{\text{resto}}{2}$$

- *O resto é menor que o divisor.*

Exemplo:

A igualdade $22 = 3 \times 6 + 4$

traduz a divisão de 22 por 6, por ser $4 < 6$. O quociente é 3 e o resto, 4.

Mas não pode traduzir a divisão de 27 por 3, por ser $4 > 3$.

O dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, mais o resto.

A quantia para comprar 3 pacotes é inferior a 26 cruzeiros; mas, para 4 pacotes é superior a 26:

$$8 \times 3 < 26 < 8 \times 4$$

Quociente a menos de uma unidade é o maior número, cujo produto pelo divisor é inferior ao dividendo.

OBSERVAÇÃO: Antes de efetuar uma divisão, raramente poderemos afirmar se o quociente é exato ou a menos de uma unidade.

Por isso, dizemos apenas **quociente,** sem fixar se é exato ou inteiro.

50. *Propriedades do resto*

1.ª) Podemos convencionar que a *divisão exata* é uma divisão com *resto nulo.* Quando o resto não é nulo, vimos que é menor que o divisor. Assim, em todos os casos podemos afirmar:

O resto é menor que o divisor ($r < d$)

Se o divisor for, por exemplo 23, o maior resto possível será 22.

2.ª) Suponhamos que vamos repartir igualmente 11 selos por 3 meninos. Cada um receberá 3 e *sobrarão* 2.

Se repartirmos outros 11 por mais 3 meninos, cada um dêsses novos 3 meninos receberá 3 e sobrarão 2.

Assim, a divisão do dôbro de selos (22) pelo dôbro de meninos (6) fornece o mesmo quociente 3 mas restarão duas vêzes 2 selos, isto é o *resto fica multiplicado por* 2.

Quando multiplicamos o dividendo e o divisor pelo mesmo número, o quociente não se altera e o resto fica multiplicado pelo mesmo número.

OBSERVAÇÃO: Ao mesmo resultado chegaremos se dividirmos o dividendo e o divisor pelo mesmo número. O resto ficará dividido pelo número.

51. *Prova da divisão*

Multiplica-se o divisor pelo quociente e ao produto soma-se o resto, se houver.

O resultado deve ser o dividendo, de acôrdo com a relação fundamental. Exemplo:

Divisão de 684 por 28

Operação

684	28
124	24
12	

Prova

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 24 \\ \hline 112 \\ 56\ \ \\ \hline 672 \\ +\ 12 \\ \hline 684 \end{array} \text{ (dividendo)}$$

52. *Expressões em que figuram as quatro operações*

Para calcular o valor de uma expressão:

1.º) Efetuam-se, em *primeiro lugar*, as operações de multiplicação e divisão, na ordem em que estão indicadas;

2.º) efetuam-se, em seguida, as adições e subtrações, como vimos anteriormente. Exemplo:

$$54 : 6 \times 2 - 3 \times 5 + 6 \times 4 : 8 = 18 - 15 + 3 = 6.$$

OBSERVAÇÃO: Se a expressão contiver *sinais de reunião* (parênteses, colchetes e chaves), deve-se iniciar pelas operações indicadas nos sinais *mais interiores*. Exemplo:

$$\begin{aligned} 4 \times [25 - 64 : 8 - (3 \times 7 - 14) : 7] &= 4 \times (25 - 8 - 7 : 7) \\ &= 4 \times (25 - 8 - 1) \\ &= 4 \times 16 = 64 \end{aligned}$$

53. *Aplicações*

● Preencha as lacunas:

1. Numa divisão o divisor é 127, o quociente 43 e o resto, 22. O dividendo é ....
2. Numa divisão em que o dividendo é 5 328, o quociente 23 e o resto 15, o divisor será ....
3. $283 = 15 \times$ .... $+ 13$; $241 \times 32 +$ .... $= 7\,735$.
4. O resto da divisão de um número inteiro por 420 será, no máximo, igual a ....
5. Numa divisão, cujo divisor é 7, os restos possíveis são ....
6. Numa DIVISÃO INEXATA em que o divisor é 15, pode haver .... restos diferentes.
7. O divisor de uma divisão é 45 e o resto, 23. O maior número que se pode somar ao dividendo, sem alterar o quociente, é ....
8. O produto de dois números é 180. O triplo do primeiro é 45. O segundo é ....
9. O número que, dividido por 158, dá 364 para quociente e o resto maior possível é ....

● Resolva:

10. Ache os dois múltiplos consecutivos de 15 entre os quais está compreendido o número 80. Traduza o resultado por uma dupla desigualdade e conclua, daí, o quociente inteiro da divisão de 80 por 15.
11. A que divisão corresponde a igualdade

$$30 = 3 \times 8 + 6\,?$$

Quais são o quociente e resto?

12. Onze meninos e duas meninas concordaram em dividir entre si 71 maçãs, sem cortar maçã alguma: e, se algumas sobrassem, dividí-las entre as duas meninas. Quantas maçãs recebeu cada menina e cada menino?

RESPOSTAS: 10. $15 \times 5 < 80 < 15 \times 6$; 11. Divisão de 30 por 8, quociente 3 e resto 6; 12. 5 e 8.

RESUMO

RELAÇÕES	PROPRIEDADES
a) *divisão exata:* $D : d = q$ ou $D = d \times q$	$(a+b) : n = a : n + b : n$
b) *divisão aproximada* $D = dq + r$ e $r < d$	$(a - b) : n = a : n - b : n$ $(a \times b) : n = a \times (b : n)$
c) *relação geral:* $dq \leq D < d(q+1)$	$n : (a \times b) = (n : a) : b$

EXERCÍCIOS DA SUB-UNIDADE

● **Preencha as lacunas:**

1. O número menor e mais próximo de 9 816 que contém exatamente 347 é ....
2. Dividi 1 574 por .... e achei 11 para quociente e 34 para resto.
3. O quociente exato de uma divisão é 315. Se multiplicarmos o dividendo por 60, o novo quociente será ....
4. O quociente exato de uma divisão é 35. Se multiplicarmos o dividendo por 46 e o divisor por 23, o novo quociente será ....
5. O produto de dois números é 240. O triplo do primeiro é 180. O segundo é ....

● **Calcule:**

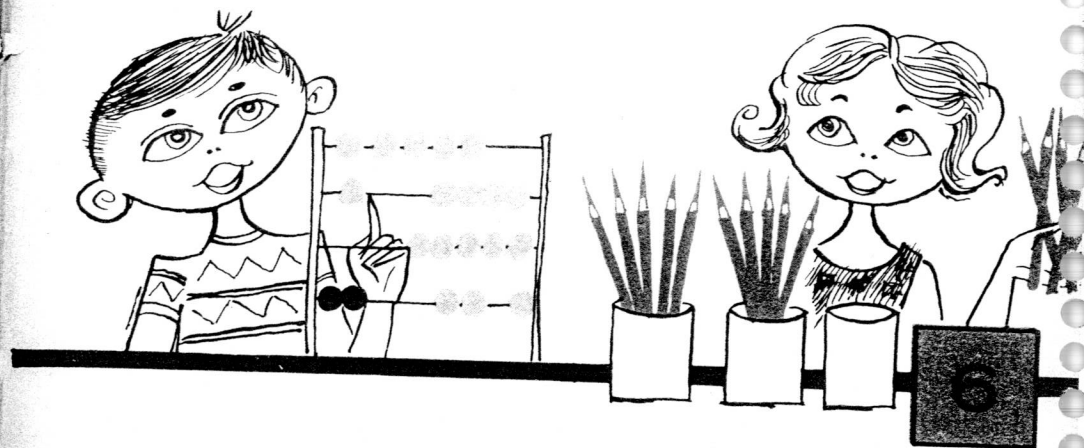
6. $15 \times 2 + 21 : 7 - 5 \times 8 : 4 - 48 : 8 \times 2$
7. $99 : 11 + 12 : 4 \times 3 - 6 \times 5 : 10$
8. $(55+35+15) : 5 - (45 - 20) : 5$

● **Resolva:**

9. Achar o dividendo de uma divisão em que o divisor é 18, o quociente é o quádruplo do divisor e o resto é o maior o possível.
10. A soma de dois números é 54 e o quociente exato da divisão do maior pelo menor é 5. Quais são os dois números?
11. A diferença entre dois números é 72 e o quociente é exato e igual a 7. Quais os dois números?

12. A soma de dois números é 107. Dividindo-se o maior pelo menor encontra-se quociente 3 e resto 11. Achar os dois números.
13. A diferença de dois números é 51. Dividindo-se o maior pelo menor encontra-se quociente 3 e resto 5. Achar os dois números.
14. Ao quádruplo de um número somei 107 e obtive 343 para soma. Achar o número.
15. Do triplo de um número subtraí 43 unidades e obtive uma diferença igual a 245. Achar o número.
16. Um número tem dois algarismos. A soma dos algarismos é 12 e o das dezenas é o triplo do das unidades. Qual é o número?
17. Divida 407 por 123. De quantas unidades se pode aumentar o dividendo sem alterar o quociente?
18. Numa divisão o divisor é 84 e o quociente 7. Qual o menor dividendo possível? Qual o maior?
19. Numa divisão o quociente é 32 e o resto 12. Qual é o menor divisor possível? Neste caso, qual o dividendo?
20. Numa divisão o divisor é 20 e o quociente é 3. Qual o maior resto possível? E o maior dividendo? Qual o menor resto possível? E o menor dividendo?

RESPOSTAS:

6. 11 7. 15 8. 16 9. 1 313 10. 9 e 45 11. 12 e 84
12. 24 e 83 13. 74 e 23 14. 59 15. 96 16. 93 17. 84
18. 588 e 671 19. 13 e 428 20. 19,79, 0 e 60.

Problemas sôbre as quatro operações

54. *Problemas*

Os tipos de raciocínio utilizados na resolução dos problemas de aritmética são os mais variados. Adiante daremos exemplos de alguns dos tipos mais comuns.

• PRIMEIRO: **Análise aritmética** ou **redução à unidade:** Êste processo de raciocínio reduz-se a duas operações:

1.ª) Calcula-se o valor de **uma** parte ou de **um** objeto (unidade).

2.ª) Calcula-se o valor de *qualquer quantidade* de partes ou de *vários* objetos. Exemplo:

Uma caixa de lápis custa Cr$ 18,00. Uma outra caixa, da mesma qualidade, com três lápis a mais, custa Cr$ 27,00. Quantos lápis contém cada caixa?

Resolução. Em primeiro lugar, calcularemos o preço de um lápis.

Os três lápis a mais da segunda caixa, custam:

Cr$ 27,00 − Cr$ 18,00 = Cr$ 9,00

Um lápis custa:

Cr$ 9,00 : 3 = Cr$ 3,00

Conhecido o preço de *um lápis*, podemos achar o número de lápis de cada uma das caixas.

A primeira tem Cr$ 18,00 : Cr$ 3,00 = 6
A segunda tem Cr$ 27,00 : Cr$ 3,00 = 9

● SEGUNDO: das **partes alíquotas.**

Primeiro exemplo. *Comprei três objetos por Cr$ 143,00. O primeiro custou Cr$ 26,00 menos que o segundo e Cr$ 18,00 mais que o terceiro. Qual o preço de cada um?*

Resolução. O processo consiste em tomar como *uma parte* o objeto de menor valor (no nosso caso é o terceiro). Então, o valor do primeiro será *uma parte* mais 18 cruzeiros e, o do segundo será uma parte mais 18 cruzeiros e mais 26 cruzeiros, isto é, *uma parte* mais 44 cruzeiros. Podemos, para esclarecer, fazer um esquema como êste em que o quadrado representa uma parte igual a menor:

3.º objeto ▢
1.º objeto ▢ + 18
2.º objeto ▢ + 18 + 26

Assim, a soma dos excessos dos dois outros sôbre o terceiro, será

18 + (18 + 26) = 62 cruzeiros.

Se tirarmos os excessos, obteremos três partes iguais às do terceiro, isto é, o triplo do terceiro:

143 − 62 = 81 cruzeiros

O preço do terceiro será:

81 : 3 = 27 cruzeiros

O preço do primeiro será obtido somando o excesso:

27 + 18 = 45 cruzeiros

O preço do segundo será:

27 + 44 = 71 cruzeiros.

Segundo exemplo. *Uma pessoa comprou três objetos por Cr$ 108,00. O segundo objeto custou o dôbro do primeiro e o terceiro, o triplo do segundo. Quanto custou cada um?*

Resolução. O esquema, análogo ao do exemplo anterior, será:

1.º ... ▢
2.º ... ▢ ▢
3.º ... ▢ ▢ ▢ ▢ ▢ ▢

A soma dos preços dos três objetos valerá portanto

1 + 2 + 6 = 9 vêzes o primeiro

O preço do primeiro será (um quadradinho):

Cr$ 108,00 : 9 = Cr$ 12,00

O preço do segundo é (dois quadradinhos):

Cr$ 12,00 × 2 = Cr$ 24,00

O preço do terceiro é:

Cr$ 12,00 × 6 = Cr$ 72,00

● TERCEIRO: **Das diferenças: total e por objeto.** Exemplo: *Num dia de Natal foram distribuídos brinquedos a um grupo de crianças e, tendo sido dados 2 a cada um, sobraram 13. Distribuiram-se, então, 4 a cada uma e sobraram apenas 3. Quantas eram as crianças? Quantos eram os brinquedos?*

Resolução. Na segunda distribuição cada uma recebe a mais (diferença por criança).

4 − 2 = 2

Na segunda distribuição, *ao todo*, recebem a mais (diferença total):

$$13 - 3 = 10$$

Dividindo a diferença total pela diferença por criança, obteremos o número de crianças, que será:

$$10 : 2 = 5$$

O número de brinquedos pode ser encontrado por intermédio de qualquer das duas distribuições:

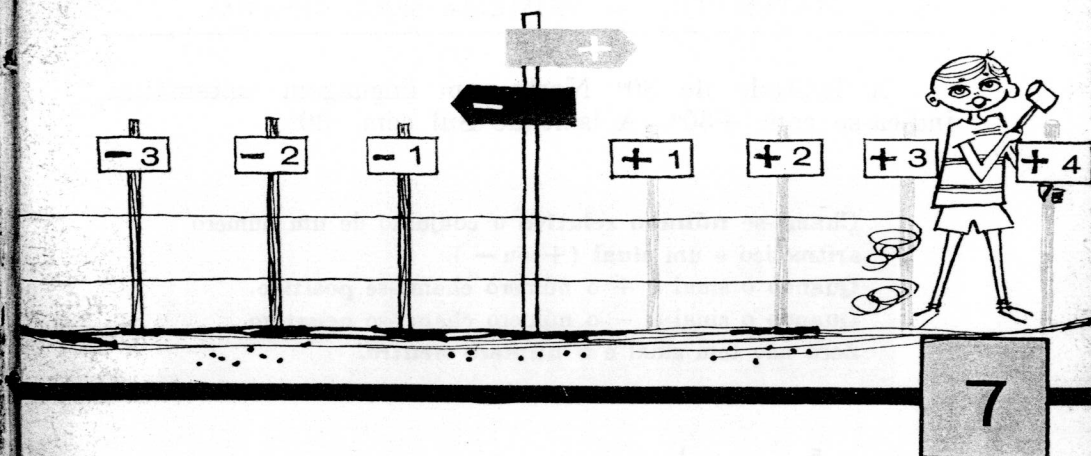
$$2 \times 5 + 13 = 23$$

ou

$$4 \times 5 + 3 = 23$$

EXERCÍCIOS

1. Um livro e um caderno custam juntos Cr$ 230,00. O livro custa Cr$ 90,00 mais que o caderno. Quanto custa cada um? *Resp.:* Cr$ 70,00 e Cr$ 160,00
2. Uma peça de fita vale ao todo Cr$ 3 000,00 mais que outra da mesma espécie. Um metro de cada uma vale Cr$ 50,00. Se o comprimento da primeira é o quádruplo do da segunda, quantos metros tem cada uma? *Resp.:* 80 m e 20 m
3. A soma de dois números é 84 e um é o triplo do outro. Achar os dois números. *Resp.:* 21 e 63
4. Três pessoas recebem juntas por dia Cr$ 990,00. A segunda recebe Cr$ 120,00 mais que a primeira e a terceira recebe Cr$ 150,00 menos que a segunda. Achar a diária de cada uma. *Resp.:* Cr$ 300,00, Cr$ 420,00, Cr$ 270,00
5. Pedro, Paulo e Mário têm juntos Cr$ 450,00. Pedro tem Cr$ 130,00 e a quantia de Paulo é o quádruplo da de Mário. Quanto tem Paulo mais que Mário? *Resp.:* Cr$ 192,00
6. Se eu juntar Cr$ 170,00 à importância que tenho, poderei adquirir um livro por Cr$ 250,00 e restar-me-ão Cr$ 60,00. Quanto possuo? *Resp.:* Cr$ 140,00
7. Dei 3 laranjas a cada menino e fiquei com 20 laranjas. Se tivesse dado 5 a cada um teria ficado com 8. Quantos eram os meninos? *Resp.:* 6 meninos
8. D. Zulmira deu 7 bombons a cada uma de suas sobrinhas e sobraram 2 bombons. Para dar 9 a cada uma ficariam faltando 8. Quantas sobrinhas tem D. Zulmira? *Resp.:* 5 sobrinhas

9. Um aluno ganha 5 pontos por exercício que acerta e perde 3 por exercício que erra. Ao fim de 30 exercícios tinha 110 pontos. Quantos exercícios acertou? *Resp.:* 25 exercícios
10. Um aprendiz recebe Cr$ 55,00 por dia sem alimentação e Cr$ 30,00 quando faz a refeição no emprêgo. No fim de 30 dias recebe Cr$ 1 400,00. Quantos dias fêz as refeições no emprêgo? *Resp.:* 10 dias
11. A soma de três números pares consecutivos é 312. Quais são êles? *Resp.:* 102, 104 e 106
12. A soma de quatro números inteiros consecutivos é 86. Achar os números. *Resp.:* 20, 21, 22 e 23
13. Aumentando-se certo número de 126 unidades, obtém-se o quádruplo do número. Achar o número. *Resp.:* 42
14. Um ciclista percorre 13 km por hora e um pedestre, 4km por hora. O ciclista está 36 km atrás do pedreste. No fim de quantas horas será o pedestre alcançado? *Resp.:* 4 horas
15. Doze rapazes quotizaram-se para comprar um barco. Dois dêles ficaram impedidos de pagar as respectivas quotas e, em consequência, cada um dos restantes teve que dar Cr$ 40,00 além de sua quota. Qual o preço do barco e qúal a quota de cada um? *Resp.:* Cr$ 2 400,00 e Cr$ 200,00
16. João e Alberto têm quantias iguais. Se João der Cr$ 20,00 a Alberto qual ficará sendo a diferença entre as quantias? *Resp.:* Cr$ 40,00
17. João e Alberto tinham quantias iguais. João deu Cr$ 90,00 a Alberto e êste ficou com o quádruplo da quantia com que ficou João. Quanto tinha primitivamente cada um? *Resp.:* Cr$ 150,00
18. Pedro e João tinham ao todo Cr$ 280,00. João deu Cr$ 20,00 e ficaram com quantias iguais. Quanto tinha primitivamente cada um? *Resp.:* Cr$ 120,00 e e Cr$ 160,00
19. Para comprar 4 cadernos do mesmo preço precisaria de mais Cr$ 10,00 além da quantia de que disponho. Se comprasse 2, sobrar-me-iam Cr$ 15,00. Quanto possuo? *Resp.:* Cr$ 40,00
20. Para comprar 35 peras do mesmo preço precisaria de mais Cr$ 23,00 além da quantia de que disponho. Se comprasse apenas 25 peras, sobrar-me-iam Cr$ 17,00. Quanto possuo? *Resp.:* 163,00

Números relativos. Operações

55. *Números relativos*

Se nos disserem que um acontecimento se verificou no ano 200, ficamos em dúvida se ocorreu *antes* ou *depois* do nascimento de Cristo. Assim, devemos dizer, por exemplo: Pitágoras nasceu em Samos no ano 580 *antes de Cristo*.

Do mesmo modo dizendo que numa cidade está fazendo 5ºC, a temperatura não fica especificada. Para precisá-la teremos de dizer 5ºC *acima* de zero ou *abaixo* de zero.

Por êsses exemplos verificamos a existência de grandezas que variam em *dois sentidos opostos*.

Muitos outros exemplos poderíamos dar como as *latitudes*, as *longitudes* etc.

Êstes dois sentidos opostos são representados, em linguagem matemática, pelos sinais + ou − precedendo as respectivas medidas.

Para os nossos exemplos, a linguagem será:

1	temperatura acima de zero	+ 5ºC
	temperatura abaixo de zero	− 5ºC
2	anos antes de Cristo	− 580
	anos depois de Cristo	+ 580

A latitude de 30° Norte, em linguagem matemática, indica-se com +30°. A latitude Sul com −30°.

Chama-se **número relativo** o conjunto de um número aritmético e um **sinal** (+ ou −).
Quando o sinal é + o número chama-se **positivo.**
Quando o sinal é − o número chama-se **negativo.**
Zero não tem sinal é o **número neutro.**

$+7, +\frac{5}{3}, +3\frac{1}{2}, +1{,}27$ são **números positivos.**

$-4, -\frac{4}{5}, -2{,}45, -2\frac{3}{4}$ são **números negativos.**

56. *Valor absoluto ou módulo. Números simétricos*

Suprimindo o sinal de um número relativo, obtemos um número aritmético que se denomina **valor absoluto** ou **módulo,** dêsse número relativo. Exemplos:

O módulo de -9 é 9.

O módulo de $+\frac{4}{5}$ é $\frac{4}{5}$.

Para indicar o módulo, o número relativo é incluído entre dois traços verticais; assim, a igualdade

$|-5| = 5$, lê-se: módulo de -5 igual a 5.

Dois números relativos que têm o mesmo módulo e o mesmo sinal são **iguais.**

Dois números relativos que têm o mesmo módulo e sinais contrários como -9 e $+9$ ou $+2{,}7$ e $-2{,}7$ denominam-se **simétricos** ou **opostos.**

57. *Representação gráfica*

Tracemos uma reta (fig. 16) e fixemos sôbre ela o ponto 0 chamado **origem** e um **sentido positivo** (indicado pela seta).

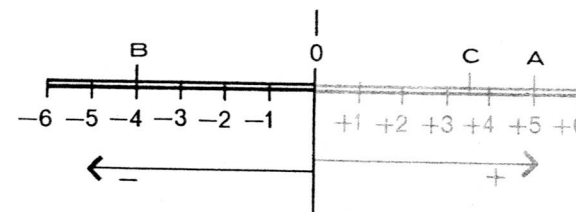



FIG. 16

Escolhido um segmento como unidade e aplicando-o sucessivamente sôbre a reta, a partir da origem, os pontos obtidos para a direita *representam os números positivos* e os da semi-reta oposta *representam os números negativos,* como mostra a figura. Assim:

o ponto A representa o número $+5$;
o ponto B representa o número -4.
o ponto 0 representa o número *zero.*

O ponto C representa o número $+3{,}5$ ou $+3\frac{1}{2}$.

58. *Comparação*

Considerando que sôbre a reta da figura 16, os números crescem da esquerda para direita, concluiremos os seguintes **critérios** de comparação.

1.°) ***De dois números positivos, o maior é o que tem maior módulo:***

$+7 > +3 \qquad +4 < +9$

2.°) ***De dois números negativos, o maior é o que tem menor módulo.***

$-8 < -3$ e $-4 > -9$

3.º) ***Qualquer número positivo é maior que zero e qualquer negativo é menor que zero.***

$$+2{,}5 > 0 \quad \text{e} \quad -8 < 0$$

Da última comparação resulta, ainda, ser *um número positivo maior que qualquer negativo.*

EXERCÍCIOS

1. Representando por zero o andar térreo de um edifício, escrever os números relativos que indicam o segundo andar do subsolo e o décimo segundo sôbre o solo.
2. Escrever, com números relativos, 75º de latitude norte, 25º de latitude sul, 38º de longitude oeste e 45º de longitude este; escolhendo como positivas a latitude norte e a longitude este.
3. Escrever, com números relativos, as datas de dois acontecimentos ocorridos respectivamente 300 anos antes da Era Cristã e 1928 anos depois, sendo a origem o início da Era Cristã. Escrever as datas dos mesmos acontecimentos, considerando como ano zero o da proclamação da República no Brasil.
4. A bôca de certa mina fica situada a 100 m acima do nível médio do mar. Indicar, com números relativos, as altitudes dos pontos atingidos pelo elevador, quando desce, a partir da abertura, respectivamente 50 m, 125 m e 231 m correspondendo o número zero ao nível do mar.
5. Um negociante tem 100 mil cruzeiros de crédito e 120 mil cruzeiros de débito. Indicar, com números relativos, o crédito e o débito do negociante, bem como o débito ou o crédito resultante se resolver encerrar suas contas.
6. A temperatura de 28º C acima de zero, em linguagem matemática, escreve-se ....
7. O valor absoluto de -17 é ...... e o de $+2{,}5$ é ......
8. O simétrico de $-4{,}7$ é ...... e o de $+3{,}4$ é ......
9. Representar sôbre uma reta os números $-2, +3, -4, -7, -3\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 0$.
10. Um navio, percorrendo um meridiano, passou da latitude +4º para −5º. Navegou para o Norte ou para o Sul? Atravessou o Equador?
11. Coloque em *ordem crescente* os números $-11, +7, 0, +3, -2, -5, +3\frac{1}{4}$.
12. Coloque em ordem *decrescente* (use o sinal $>$):
    $-3,\ 0,\ -2,\ +4,\ +5,\ -1.$

RESPOSTAS:

1. −2 e +12
2. +75º, −25º, −38º, +45º
3. −300, +1 928 e −2 189, +39
4. +50, −25 e −131
5. +100, −120 e −20
6. +28º
7. 17 e 2,5
8. +4,7 e −3,4
10. Para o Sul. Sim.

59. *Operações com números relativos*

Com os números relativos efetuam-se as mesmas operações estudadas com os números inteiros e fracionários; os têrmos têm as mesmas denominações, e são também iguais os sinais que as representam.

Assim, para indicar a soma do número $+3$ com o número -5 escreve-se: $(+3) + (-5)$

60. *Adição de dois números relativos*

A adição fica esclarecida com os gráficos abaixo.

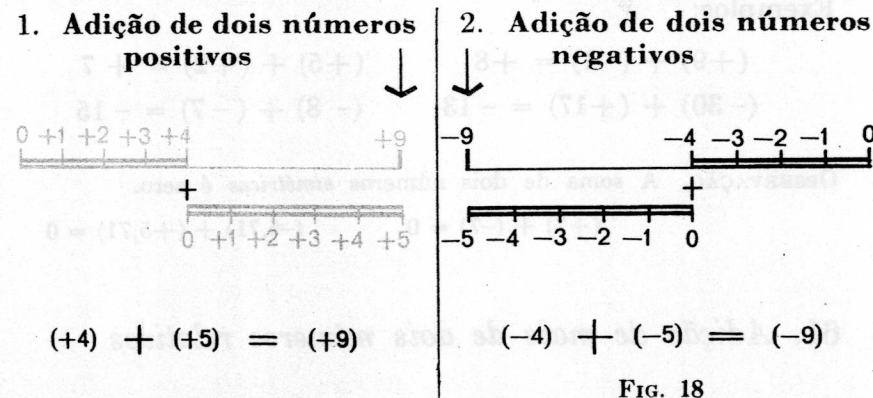



FIG. 18

1 **A soma de dois números de mesmo sinal obtém-se adicionando os módulos e dando o sinal comum.**

3. **Adição de um número positivo com um negativo**

$(+9) + (-5) = (+4)$ $\qquad$ $(-9) + (+5) = (-4)$

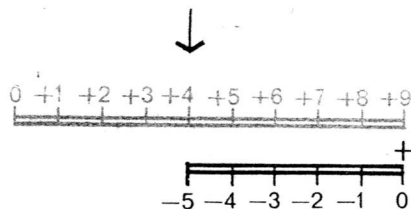
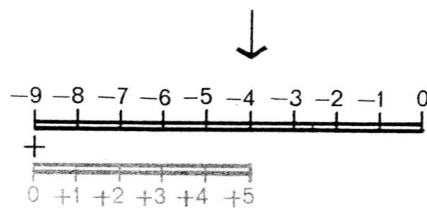



FIG. 19 $\qquad$ FIG. 20

2 — A soma de dois números de **sinais contrários** obtém-se **subtraindo** os módulos e dando o sinal da parcela de **maior módulo.**

Exemplos:

$(+9) + (-1) = +8$ $\qquad$ $(+5) + (+2) = +7$

$(-30) + (+17) = -13$ $\qquad$ $(-8) + (-7) = -15$

OBSERVAÇÃO. A soma de dois números *simétricos* é zero.

$(+7) + (-7) = 0$ $\qquad$ $(-5{,}71) + (+5{,}71) = 0$

61. *Adição de mais de dois números relativos*

A soma de vários números relativos obtém-se adicionando os dois primeiros, ao resultado adicionando o terceiro, e assim sucessivamente, até considerar o último número. Exemplo:

$(-5)+(+3)+(-4)+(+8)=(-2)+(-4)+(+8)=(-6)+(+8)=+2.$

62. *Soma algébrica*

Numa adição de números relativos, como

$$(-4)+(+5)+(-3)+(+2)+(-1)$$

convenciona-se suprimir os sinais de adição, escrevendo-se apenas:

$$-4 +5 - 3 +2 - 1$$

À expressão assim escrita dá-se o nome *soma algébrica.* Chama-se *têrmo* de uma soma algébrica cada um dos números que nela figuram, com o sinal respectivo. Quando o primeiro têrmo de uma soma algébrica é positivo, subentende-se o sinal +. Assim:

$$(+5) + (-3) + (-4) + (+7) = 5 - 3 - 4 + 7$$

63. *Subtração*

Primeiro exemplo: *Calcular a diferença* $(+5) - (+3)$.

A diferença é o número que somado a + 3 dá +5. Para achar êste número, podemos compô-lo de duas parcelas:

a primeira, o simétrico de +3, que somado a êle dá *zero;*

a segunda, o próprio minuendo + 5, que somado a zero dá +5.

Assim, a diferença será obtida:

$$(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = +2$$

Realmente: $\qquad (+2) + (+3) = +5.$

Segundo exemplo: *Calcular* $(-5) - (+3)$.

O número que somado a +3 dá − 5 é a soma $-5 + (-3)$, cuja segunda parcela (-3), somada a $(+3)$, dá zero. Assim:

$$(-5) - (+3) = (-5) + (-3) = -8$$

Observemos a **Regra:**

Para achar a diferença entre dois números relativos soma-se ao minuendo o simétrico do subtraendo.

Exemplos:

(–6) — (–4) = (–6) + (+4) = (–2)

(–8) — (+5) = (–8) + (–5) = (–13)

FIG. 21

OBSERVAÇÃO: De acôrdo com a regra da subtração, uma expressão formada por adições e subtrações pode ser indicada apenas com adições. Exemplo:

Seja a expressão (+5) – (+2) – (–3) + (–5)

Substituindo as subtrações por adições, temos:

(+5) – (+2) – (–3) + (–5) = (+5) + (–2) + (+3) + (–5)

que também podemos escrever, com a forma de SOMA ALGÉBRICA:

5 – 2 + 3 – 5 = 1

64. *Aplicações*

Efetue as adições:

1. (+4) + (+5)
2. (– 7) + (+9)
3. (+3) + (– 15)
4. (– 8) + (– 23)
5. (– 3) + (+5)
6. (– 3) + (– 5)
7. (+5) + (– 3)
8. (– 2) + (– 5)
9. (– 5) + (– 7)
10. (– 5) + (+7)
11. (+5) + (– 7)
12. (+5) + (+7)
13. (+3) + (– 8) + (+12) + (–11)
14. (– 7) + (+4) + (– 5) + (+8)
15. – 19 + 11 + 5 – 14 + 27

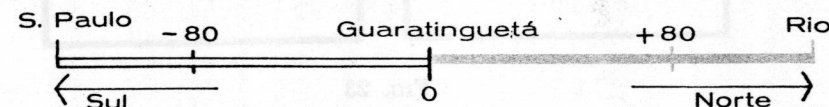
RESPOSTAS:
+9, +2, –12, –31, +2, –8, +2, –7, –12, +2, –2, +12, –4, 0, +10.

Efetue as subtrações:

16. (+12) – (+54) *Resp.:* – 42
17. (– 12) – (+54) *Resp.:* – 66
18. (+12) – (– 54) *Resp.:* +66
19. (– 12) – (– 54) *Resp.:* +42
20. (– 3) – (+2) *Resp.:* – 5

65. *Multiplicação de dois números relativos*

Considere a Estrada de Ferro do Rio a S. Paulo. Marque zero em Guaratinguetá (meio da viagem). Para o Norte marque distâncias positivas (Rio) e para o Sul, negativas (S. Paulo).

1. Suponha que um trem passa em Guaratinguetá a meia-noite, percorrendo 40km por hora na direção Norte (+40km). A que distância estará 2 horas depois (+2) da meia noite? A resposta é 80km para o Norte ou +80, isto é:

(+40) × (+2) = + 80

2. Considere agora que o trem corria para o Sul (–40km), com a mesma velocidade. A que distância estará de Guaratinguetá 2 horas depois (+2) da meia-noite? A resposta é 80km para o Sul ou –80, isto é:

(–40) × (+2) = – 80

3. Se, agora, o trem passasse por Guaratinguetá a meia-noite, viajando para o Norte com a mesma velocidade (+40), a que distância estaria 2 horas *antes* (–2) da meia-noite? A resposta é 80km ao Sul ou –80, isto é:

(+40) × (–2) = – 80

4. Finalmente, suponha que o trem passou à meia-noite, viajando para o Sul, a 40km por hora (−40). Onde estaria 2 horas *antes* (−2) da meia-noite? A resposta é 80km ao Norte, ou + 80, isto é:

$$(-40) \times (-2) = +80$$

Observe a *regra:*

O **produto** de dois números de **mesmo sinal** é **positivo.**
O **produto** de dois números de **sinais contrários** é **negativo.**
O módulo é sempre o **produto dos módulos** dos fatôres.

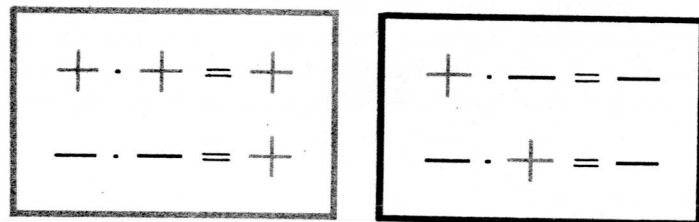
Regra dos Sinais:

Fig. 23

Exemplos:

1.º) $(+5)\times(+3) = +15$

2.º) $(-5)\times(+3) = -15$

3.º) $(+5)\times(-3) = -15$

4.º) $(-5)\times(-3) = +15$

66. *Multiplicação de mais de dois números relativos*

Para obter o produto, multiplica-se o primeiro fator pelo segundo, o resultado obtido pelo terceiro, e assim sucessivamente. Exemplo:

$$(-4)\times(-3)\times(+2)\times(-1) = (+12)\times(+2)\times(-1)$$
$$= (+24)\times(-1) = -24$$

Observemos que o sinal do produto muda, cada vez que encontramos um fator negativo. O sinal do produto depende, portanto, do número de fatôres negativos. Se o número de fatôres negativos fôr **par,** o produto será **positivo.** Se o número de fatôres negativos fôr **ímpar,** o produto será **negativo.** Exemplos:

1.º) $(+2) \times (-1) \times (-3) \times (+5) = +30$

2.º) $(-2) \times (-5) \times (-7) \times (+3) = -210$

67. *Potenciação*

A potência de expoente inteiro e positivo é um produto de fatôres iguais, como vimos no estudo das operações com números inteiros.

Do estudo da multiplicação concluímos, portanto:

1.º) *Quando o expoente é* ***par*** *a potência é* ***positiva.***

Exemplos:

$$(+3)^4 = (+3)(+3)(+3)(+3) = +81$$
$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = +81$$

2.º) *Quando o expoente é* ***ímpar*** *a potência tem o sinal da* ***base.***

Exemplos:

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$
$$(+4)^3 = (+4)(+4)(+4) = +64$$

As regras de multiplicação e divisão de potências da mesma base são aplicáveis às dos números relativos. Assim:

$$(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$$
$$(+5)^6 : (+5)^3 = (+5)^{6-3} = (+5)^3$$

68. *Divisão*

A divisão tem por fim achar um dos fatôres de um produto de dois fatôres, sendo dados o produto e o outro fator.

Assim, sabendo que $(+4) \times (+5) = +20$
concluímos: $(+20) : (+4) = +5$

Da mesma forma, sendo $(+4) \times (-5) = -20$
concluímos: $(-20) : (+4) = -5$
e $(-20) : (-5) = +4$

Finalmente, de $(-4) \times (-5) = +20$
concluímos: $(+20) : (-4) = -5$

Em resumo, temos os resultados:

1.º) $(+20) : (+4) = +5$
2.º) $(-20) : (+4) = -5$
3.º) $(-20) : (-5) = +4$
4.º) $(+20) : (-4) = -5$

O quociente de dois números de mesmo sinal é positivo.

O quociente de dois números de sinais contrários é negativo.

O *módulo* do quociente é o módulo do dividendo dividido pelo módulo do divisor.

Regra dos sinais:

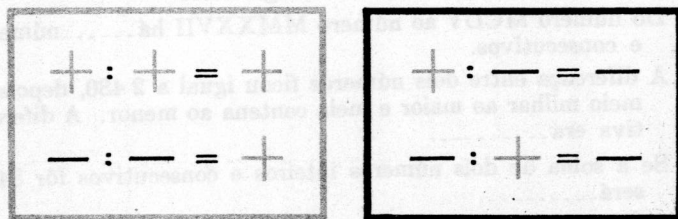



FIG. 24

69. *Aplicações*

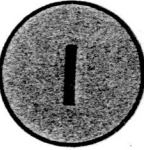
Efetue as multiplicações:

1. $(-2) \times (-3) \times (+4) \times (-2)$.
2. $(-3) \times (+5) \times (+3) \times (-3)$.
3. $(-61) \times (+2)$.
4. $(-1)^2 \times (+4) \times (-1)^3$.
5. $(-2)^3 \times (-2) \times (-9)$.
6. $(-2)^3 \times (-2)^3 \times (-1)^5$.

Efetue as divisões:

7. $(+30) : (-5)$.
8. $(-2)^2 : (-4)$.
9. $(-75) : (+25)$.
10. $(-70) : (-35)$.
11. $(+245) : (-35)$.
12. $(-2\,555) : (+73)$.
13. $(+10) : (-2)$.

Resolva:

10. $[-36 + (-17) - (-83)] : (-5)$. *Resp.:* -6.
11. $[3+(-24)]\times(-8)+[32-(-18)] : (-10)$. *Resp.:* 163.
12. $(-2)^2 \times (-3)^2$. *Resp.:* 36.
13. $(-3)^4 : (-3)^2$. *Resp.:* 9.
14. $(-2)^3 \times (+3)^2$. *Resp.:* -72.
15. $(-16)^2 : (-4)^3$. *Resp.:* -4.
16. $(-5)^6 : (-5)^3$. *Resp.:* -125.
17. $(-2)^3 \times (-3)^3$. *Resp.:* 216
18. $(+5)^6 : (-5)^3$. *Resp.:* -125.
19. $(-5)^6 : (-5)^3$. *Resp.:* -125.
20. $(-2)^3 \times (-1)^3 \times (-3)^2$. *Resp.:* 72.

Exercícios de revisão da unidade I

Complete as lacunas:

1. No sistema decimal 100 unidades de 3.ª ordem formam 10 unidades de _________ ordem.
2. Em 5 897 há _________ dezenas e _________ meias centenas.
3. De 97 a 506, incluídos, existem _________ números pares e _________ números ímpares.
4. De _________ até 1 286, incluídos, existem 345 números inteiros e consecutivos.
5. 500 centenas equivalem a _________ unidades de 2.ª ordem e a meia unidade de _________ ordem.
6. A diferença entre 70 centenas e meio milhar é igual a _________ meias dezenas.
7. Substituindo a letra *a* no número 45*a*87 pelo algarismo _________ a soma dos valores absolutos será 27 e a dos valores relativos ______.
8. Do maior número de 2 algarismos, inclusive, até o maior número de 3 algarismos, também inclusive, há______números e, para escrevê-los, são empregados_________algarismos.
9. Do número MCDV ao número MMXXVII há______números inteiros e consecutivos.
10. A diferença entre dois números ficou igual a 2 480, depois que somei meio milhar ao maior e meia centena ao menor. A diferença primitiva era__________.
11. Se a soma de dois números inteiros e consecutivos fôr 841, o maior será__________.
12. Uma soma tem duas parcelas. Se aumentarmos a primeira de 15 unidades e diminuirmos a segunda de 32 unidades, a soma_________ de_________ unidades.

13. Se a soma de dois números ímpares e consecutivos fôr 404, o produto dos dois números será ....

14. O produto de dois números é 392. Subtraindo 4 unidades de um dêles o produto passa a ser 280. Os dois números são ....e.......

15. O quociente da divisão de um número por 5 é o triplo de 18. O número é.........

16. Numa divisão o quociente é igual ao divisor e o resto é o maior possível. A soma do divisor com o quociente é 18, logo o dividendo é ....

Resolva os problemas:

17. Se organizarmos a lista dos números pares de 144 até 180, incluídos êsses números, quantos algarismos escreveremos? *Resp.:* 57

18. Numerando as páginas de um caderno, Norma escreveu 1 236 algarismos. Quantas páginas tinha o caderno? *Resp.:* 448

19. Quantas vêzes aparece o algarismo 6 no lugar das unidades até o número 88? *Resp.:* 9

20. Quantas vêzes aparece o algarismo 6 no lugar das dezenas até o número 200? *Resp.:* 20

21. Escreve-se a sucessão dos números naturais até 400. Quantas vêzes aparece o algarismo 3? *Resp.:* 180

22. Um aluno efetuou a multiplicação 231 × 108 e escreveu o segundo produto sob o primeiro deslocando-o para esquerda uma única ordem. Determinai o êrro sem refazer a operação. *Resp.:* 20 790 para menos.

23. Numa divisão o quociente é 101, o divisor 32, e o resto é o maior possível. Achar o dividendo. *Resp.:* 3 263

24. A soma de dois números é 307. Dividindo-se o maior pelo menor o quociente é 5 e o resto 7. Achar os dois números. *Resp.:* 50 e 257

25. A soma de dois números é 119. O quociente da divisão do maior pelo menor é 3 e o resto é o maior possível. Achar os dois números. *Resp.:* 95 e 24

26. Um livro e um caderno custam juntos Cr$ 260,00. Um livro e um lápis, Cr$ 210,00. Um caderno e um lápis, Cr$ 60,00. Quanto custa cada objeto? *Resp.:* Cr$ 205,00 Cr$ 55,00 e Cr$ 5,00

27. Marlene tem dinheiro em 3 gavetas. Na 1.ª e 2.ª tem ao todo Cr$ 190,00. Na 1.ª e 3.ª tem ao todo Cr$ 180,00 e, na 2.ª e 3.ª, Cr$ 170,00. Quanto possui em cada gaveta? Quanto possui ao todo? *Resp.:* Cr$ 100,00; Cr$ 90,00; Cr$ 80,00 e Cr$ 270,00

28. Ao serem distribuídos Cr$ 280,00 entre três pessoas, a primeira recebe tantas notas de 20, quantas a segunda de 10 e a terceira de 5. Quantas notas recebe cada uma? *Resp.:* 8

29. Num terreiro há galinhas e coelhos num total de 45 cabeças e 128 pés. Quantos animais há de cada espécie? *Resp.:* 19 coelhos e 26 galinhas

30. Num terreiro há marrecos e porcos, ao todo 19 cabeças e 60 pés. Quantos marrecos há no terreiro? *Resp.:* 8

Efetue as operações:

31. $(+4) + (-245)$.
32. $(-581) + (-319)$.
33. $(+32) + (-42)$.
34. $(+3) + (-4)$.
35. $-2+5-3+5$. *Resp.:* $+5$.
36. $(3-15) + (7-16)$. *Resp.:* -21.
37. $(5-3) + (3-5)$. *Resp.:* 0
38. $(-5) - (-8)$. *Resp.:* 3
39. $(-3) - (+5)$. *Resp.:* -8
40. $(-3) - (-5)$. *Resp.:* $+2$.
41. $(+3) - (+5)$. *Resp.:* -2.
42. $(+3) - (-5)$. *Resp.:* $+8$.

43. O elevador de um arranha-céu, que está no 2.º andar do subsolo, sobe 12 andares, desce 5, sobe 2, desce 6 e finalmente sobe 1. Indicar por uma soma algébrica, o percurso do elevador. Determinar a posição final, fazendo corresponder a zero o andar térreo. *Resp.:* 2.

44. Um automóvel, partindo do quilômetro 12 da Estrada Rio-São Paulo, percorre 18 quilômetros na direção do Rio, e, regressando, percorre 23 quilômetros. Indicar a posição do automóvel em relação ao quilômetro zero. Os quilômetros são numerados de zero em diante, na direção do Rio para São Paulo, a partir de um ponto situado a 12 km da cidade do Rio. *Resp.:* 17.

8

Múltiplos e divisores. Divisibilidade

1. *Divisibilidade*

O número 675 é múltiplo de 25? 25 é divisor de 675?
Para responder a estas perguntas, que são equivalentes, nós efetuamos a divisão de 675 por 25. Encontramos:

$$675 : 25 = 27$$

A divisão é exata. O quociente é 27.
Êste fato exprime-se de várias maneiras:

675 é múltiplo de 25
675 é DIVISÍVEL por 25
25 é divisor de 675
25 é fator de 675
25 é sub-múltiplo de 675
25 divide 675

2. *Caracteres de divisibilidade*

Para *certos valores do divisor* é possível responder ràpidamente àquelas perguntas, sem efetuar a divisão. A regra correspondente chama-se um **caráter de divisibilidade.**

Caráter de divisibilidade é uma regra que permite verificar se um número é divisível por outro, sem efetuar a divisão por êsse outro.

3. *Caráter de divisibilidade por 10, por 2 e por 5*

1.º) Se nós decompusermos um número em dezenas e unidades, por exemplo 5 827, obteremos:

$$5\,827 = 582 \times 10 + 7 \qquad (7 < 10)$$

As duas relações mostram que 7 é o resto da divisão de 5 827 por 10.

O resto da divisão de um número por 10 é o número formado pelo algarismo das unidades.

Daí, resulta o caráter de divisibilidade:

Um número é divisível por 10 sòmente se o algarismo das unidades é zero.

Exemplo: Os números 50, 280, 7 200 *são divisíveis* por 10. Os números 72, 85, 943 *não são divisíveis* por 10. Os restos respectivos são: 2, 5 e 3.

2.º) Todo múltiplo de 10 é múltiplo de 2 e de 5, pois $10 = 2 \times 5$. Assim a igualdade anterior pode ser escrita.

$$5\,827 = 582 \times (2 \times 5) + 7.$$

O resto da divisão de um número por 2 ou por 5 é o mesmo que o do algarismo das unidades.

Assim, um número será divisível por 2 ou por 5 se o algarismo das unidades fôr 0 ou divisível por 2 ou 5.

Ora, os múltiplos de 2 de um só algarismo são 2, 4, 6 e 8. Concluímos, então, o caráter de divisibilidade:

Um número é divisível por 2, quando o algarismo das unidades é 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exemplo:

Os números 48, 76, 294, 572 e 970 são divisíveis por 2.

Os números 341, 83, 645, 207 e 6 589 não são divisíveis por 2; o resto é sempre 1.

Os números divisíveis por 2 chamam-se pares. *Os não divisíveis chamam-se* ***ímpares.***

3.º) O único número de um algarismo divisível por 5 é 5. Concluímos o caráter de divisibilidade:

Um número é divisível por 5 quando termina em zero ou 5.

Exemplo:

Os números 2 050 e 4 875 são divisíveis por 5.

Os números 103, 97, 501 não são divisíveis por 5. Os restos respectivos são 3, 2 e 1.

4. *Caráter de divisibilidade por 4, por 25 e por 100*

1.º) Se nós decompusermos um número qualquer, por exemplo o número 5 827 em centenas e unidades, obteremos:

$$5\,827 = 58 \times 100 + 27 \qquad 27 < 100$$

As duas relações mostram que 27 é o resto da divisão do número por 100.

O resto da divisão de um número por 100 é o número formado pelos dois algarismos da direita.

Daí o caráter de divisibilidade por 100:

Um número é divisível por 100 sòmente se os dois algarismos da direita forem zeros.

2.º) Todo múltiplo de 100 é múltiplo de 4 e de 25, pois $100 = 4 \times 25$. Assim, a igualdade anterior pode ser escrita:

$$5\,827 = 58 \times (4 \times 25) + 27$$

Concluímos:

O resto da divisão de um número por 4 ou por 25 é o mesmo que o do número formado pelos dois algarismos da direita.

Concluímos o caráter de divisibilidade:

Um número é divisível por 4 sòmente quando o número formado pelos dois algarismos da direita o fôr.

Exemplos:

O número 9 638 não é divisível por 4 porque o número 38 dividido por 4 deixa resto 2.

3.º) Do mesmo modo um número só é divisível por 25 se os dois algarismos da direita formarem um número divisível por 25 ou se ambos são nulos. Ora, os múltiplos de 25 de dois algarismos são 25, 50 e 75. Podemos concluir:

Um número é divisível por 25 quando termina em 00, 25, 50 ou 75.

Exemplo:

Os números 2 000, 375 e 8 550 são divisíveis por 25.

O resto da divisão de 8 593 por 25 é 93-75 = 18.

5. *Caráter de divisibilidade por 9 e por 3*

Dividindo por 9 as potências sucessivas de 10 encontraremos:

$$10 = 9 \times 1 + 1 = m.\ 9 + 1$$
$$100 = 9 \times 11 + 1 = m.\ 9 + 1$$
$$1\,000 = 9 \times 111 + 1 = m.\ 9 + 1$$

e, assim por diante onde $m.\ 9$ é abreviação de *múltiplo de 9: tôda potência de 10 é a soma de um múltiplo de 9 com a unidade.*

De acôrdo com essa conclusão, se decompusermos, nas unidades de diversas ordens o número 458, por exemplo, teremos:

$$400 = 4 \times 100 = 4\,(m.\ 9+1) = m.\ 9 + 4$$
$$50 = 5 \times 10 = 5\,(m.\ 9 + 1) = m.\ 9 + 5$$
$$8 = \qquad 8$$

Somando membro a membro e observando que a soma de múltiplos de 9 é múltiplo de 9, vem:

$$458 = m\ .\ 9 + (4+5+8)$$

Assim, todo número pode ser decomposto em uma soma de *duas* parcelas, de modo que a *primeira* seja um múltiplo de 9, e portanto de 3, e a *segunda* a soma dos valores absolutos dos seus algarismos.

Daí, o caráter de divisibilidade:

Um número é divisível por 9 ou por 3, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos o fôr.

Exemplos:

1.º) O resto da divisão do número 827 por 9 obtém-se dividindo 8 + 2 + 7 ou 17 por 9, sendo portanto 8.

2.º) O resto da divisão do mesmo número por 3 é 2, obtido na divisão de 17 por 3.

3.º) O número 2 439 é divisível por 9, porque a soma $2 + 4 + 3 + 9$, ou 18, é divisível por 9.

OBSERVAÇÃO: Sempre que, ao efetuar a soma dos algarismos se obtiver um múltiplo de 9, pode-se abandoná-lo, o que corresponde a considerá-lo somado à primeira parcela da decomposição. Vulgarmente, traduz-se esta maneira de proceder pela expressão *tirar os noves fora*. Assim, para determinar o resto do número 24 517 por 9, diremos apenas: 2 e 4, 6 e 5, 11, noves fora 2; 2 e 1, 3 e 7, 10, noves fora 1. O resto é 1.

6. *Aplicações*

1. **Escreva cinco frases equivalentes à frase 221 *é múltiplo de* 17.**
2. **Sublinhe os números da lista seguinte que são divisíveis por 2: 59, 98, 107, 128 e 2 589.**
3. **Sublinhe com *um* traço os números divisíveis por 5 e com *dois* traços os divisíveis por 5 e por 2 ao mesmo tempo: 43, 85, 110, 183, 2 100.**
4. **Sublinhe os números divisíveis por 4: 286, 3 004, 536, 2 781.**
5. **Sublinhe com um traço os números divisíveis por 25 e com dois traços os divisíveis por 4 e 25 ao mesmo tempo: 4 585, 3 575, 4 325, 2 700 e 2 850.**
6. **Sublinhe os números divisíveis por 9: 5 391, 354, 1 035 e 374.**

Complete as lacunas:

7. **O resto da divisão do número 2 343 por 9 é........., por 3 é......... e por 4 é..........**
8. **O resto da divisão do número 81 719 por 3 é......... e por 9 é........**
9. **O maior número de 4 algarismos significativos diferentes, divisível por 25, é..........**
10. **Colocando o algarismo .... no lugar da letra *a* no número 5 725*a*, obtém-se um número divisível por 2 e por 9.**

7. *Divisibilidade por 11*

Considerando as potências sucessivas de 10, é fácil verificar as igualdades seguintes:

$$10 = 11 - 1 = m\ .\ 11 - 1$$
$$100 = 11 \times 9 + 1 = m\ .\ 11 + 1$$
$$1\,000 = 100 \times 10 = (m\ .\ 11 + 1)\ 10 = m\ .\ 11 + 10 = m\ .\ 11 + 11 - 1 = m\ .\ 11 - 1$$

e assim por diante. Observando os resultados conclui-se: tôda potência de 10 é um múltiplo de 11 mais ou menos 1; *mais*, quando o número de zeros fôr par; *menos*, quando fôr ímpar.

De acôrdo com essa conclusão, se decompusermos nas unidades de diversas ordens o número 5 739, por exemplo, obteremos:

$$5\,000 = 5(m\ .\ 11 - 1) = m\ .\ 11 - 5$$
$$700 = 7(m\ .\ 11 + 1) = m\ .\ 11 + 7$$
$$30 = 3(m\ .\ 11 - 1) = m\ .\ 11 - 3$$
$$9 = 9$$

Somando membro a membro e observando que a soma de múltiplos de 11 é, ainda, um múltiplo de 11:

$$5\,739 = m\ .\ 11 + 9 - 3 + 7 - 5,$$

ou, $$5\,739 = m\ .\ 11 + [(9 + 7) - (3 + 5)]$$

A primeira parcela é divisível por 11 e a segunda (colchête) é a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a dos de ordem par: logo, podemos concluir:

1.º) **Um número é divisível por 11, quando a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar menos a dos de ordem par fôr zero ou múltiplo de 11.**

2.º) **O resto da divisão de um número por 11 é igual ao resto da divisão por 11 da soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar menos a dos de ordem par, a partir da direita.**

Exemplos:

1.º) Seja o número 563. A diferença é $(3 + 5) - 6 = 2$. O resto da divisão do número por 11 é 2.

2.º) Seja 31 817. A diferença é

$$(7 + 8 + 3) - (1 + 1) = 18 - 2 = 16$$

A divisão de 16 por 11 dá resto 5, que é o da divisão do número dado por 11.

3.º) Seja 2 387. A diferença é:

$$(7 + 3) - (8 + 2) = 10 - 10 = 0$$

O número 2 387 é divisível por 11.

Observação: Pode acontecer que a soma dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar seja menor que a dos de ordem par. Neste caso, adiciona-se à primeira o múltiplo de 11 que tornar possível a subtração. Exemplo:

Achar o resto da divisão de 13 593 por 11.
A soma dos algarismos de ordem ímpar é: $3 + 5 + 1 = 9$.
A dos de ordem par é: $9 + 3 = 12$.
Soma-se 11 à primeira soma e o resto da divisão será:

$$(9 + 11) - 12 = 8.$$

8. *Propriedades elementares dos restos. Prova dos divisores*

Primeira propriedade. *Consideremos a soma:*

$$171 + 493 + 423 = 1\,087$$

Os restos das divisões das parcelas por 11, por exemplo, são 6, 9 e 5, respectivamente, isto é:

$$171 = m \,.\, 11 + 6$$
$$493 = m \,.\, 11 + 9$$
$$423 = m \,.\, 11 + 5$$

Como a soma de múltiplos de 11 é um múltiplo de 11, o resultado da adição será:

$$1\,087 = m \,.\, 11 + (6 + 9 + 5)$$

Assim, o resto da divisão da soma 1 087 por 11 é o mesmo que o de $6 + 9 + 5$, o que permite concluir:

O resto da divisão de uma soma por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, da soma dos restos das parcelas.

Prova da soma. Esta propriedade do resto da soma pode ser aplicada para tirar a prova da operação. Realmente, se a operação estiver certa, achando-se o resto da soma por um divisor qualquer e o resto da soma dos restos das parcelas pelo mesmo divisor, obtém-se o mesmo resultado. Exemplo:

Prova da adição pelo divisor 9.

$$\begin{array}{r l} 473 & \ldots\ldots 5 \\ 2\,284 & \ldots\ldots 7 \\ 1\,561 & \ldots\ldots 4 \\ \hline 4\,318 & \ldots\ldots 7 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} 7$$

O resto do total é 7 e o resto de $5 + 7 + 4$ ou 16, também é 7; a operação *deve estar certa*.

Escolha do divisor. Os divisores que devem ser utilizados para a prova, são 3, 9 e 11, pois, na determinação dos restos correspondentes, interferem todos os algarismos do número dado. O divisor 2, por exemplo, não acusará um êrro cometido na coluna das dezenas ou outra, que não seja a das unidades.

O divisor 3, fornecendo apenas os três restos diferentes 0, 1 e 2, facilita uma coincidência de restos iguais, em operações erradas, por isso evitamos empregá-lo. Por êstes motivos, os divisores escolhidos são 9 e 11, e dêstes ainda preferimos 9, por ser mais simples o princípio de divisibilidade correspondente.

A preferência do divisor 9 faz que a prova dos divisores seja mais conhecida por **prova dos noves.**

Prova da subtração. O minuendo é a soma do subtraendo com o resto, logo podemos aplicar prova análoga à da soma. Exemplo:

$$\begin{array}{rl} 6\,425 & \ldots\ldots \text{ resto } 8 \\ -\ 3\,216 & \ldots\ldots \text{ resto } 3 \\ \hline 3\,209 & \ldots\ldots \text{ resto } 5 \end{array} \Big\} = 8$$

SEGUNDA PROPRIEDADE. *Consideremos o produto:*

$$42 \times 25 = 1\,050$$

Os restos das divisões dos fatôres por 9 são respectivamente 6 e 7, isto é,

$$42 = m\ .\ 9 + 6$$
$$25 = m\ .\ 9 + 7$$

multiplicando-se os dois fatôres, obtém-se:

$$1\,050 = m\ .\ 9 + 6 \times 7$$

porque o produto que tem um fator múltiplo de 9 é, também, múltiplo de 9.

Assim, o resto da divisão do produto 1 050 por 9 é o mesmo que o de 6 × 7, o que permite concluir:

> **O resto da divisão de um produto por um número é igual ao resto da divisão, pelo mesmo número, do produto dos restos dos fatôres.**

Prova da multiplicação. A propriedade aplica-se para tirar a prova dos divisores de uma multiplicação. Exemplo:

Prova de uma multiplicação pelo divisor 9.

$$\begin{array}{rl} 5\,731 & \ldots\ldots \text{ resto } 7 \\ 58 & \ldots\ldots \text{ resto } 4 \\ \hline 45\,848 & \\ 28\,655 & \\ \hline 332\,398 & \ldots\ldots \text{ resto } 1 \end{array} \quad 7 \times 4 = 28 \text{ resto } 1$$

Prova da divisão. De acôrdo com a lei fundamental o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, mais o resto.

Daí, a prova da divisão, combinando-se as provas da multiplicação e da soma.

Exemplo:

Prova de uma divisão pelo divisor 9.

$$\begin{array}{rl|ll} \text{resto } 7 \ldots & 5\,947 & 73 & \ldots \text{ resto } 1 \\ & 107 & 81 & \ldots \text{ resto } 0 \\ & 34 \ldots\ldots\ldots\ldots & & \text{resto } 7 \end{array} \quad 1 \times 0 = 0 \quad 0 + 7 = 7$$

9. *Aplicações*

1. Sublinhe os números divisíveis por 11: 11 111, 90 900, 81 719, 45 720.
2. Verifique qual dos seguintes números é divisível por 3, 4 e 11, ao mesmo tempo: 2 356, 1 980, 5 246.
3. Ache o valor do algarismo *a* nos seguintes números, para que o resto por 11 seja 2: 5*a*4 e 2*a*97.
4. Verifique a exatidão das seguintes operações utilizando o divisor 11:

   a) 337+625+329 = 1 291 *c*) 832 × 401 = 333 632

   b) 2 032 − 1 913 = 129 *d*) 15 394 : 43 = 358

5. Verifique as seguintes operações pelo divisor 9 (prova dos 9):

   a) $396+227+581+201 = 1\ 395$ *c*) $745 \times 345 = 257\ 025$

   b) $1\ 807 - 541 = 1\ 266$ *d*) $785 = 22 \times 35 + 15$ (divisão).

6. Ao multiplicar o número 5 431 por 107, o operador esqueceu de deslocar o segundo produto parcial e obteve, assim o produto de 5 431 por 17. A prova dos nove revelará o êrro?

RESUMO

1. Um número é divisível por 10, por 5 ou por 2, sòmente se o número formado pelo primeiro algarismo da direita o fôr.
2. Um número é divisível por 100, por 25 ou por 4, sòmente se o número formado pelos dois algarismos da direita o fôr.
3. Um número é divisível por 9 ou por 3 sòmente se a soma de seus algarismos fôr divisível por 9 ou por 3.
4. Um número é divisível por 11 sòmente se a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos de ordem par fôr um múltiplo de 11.
5. As propriedades do resto da divisão, da soma e do produto, permitem fazer a prova de uma operação.

EXERCÍCIOS DA SUBUNIDADE

Preencha as lacunas:

1. O algarismo das unidades de um número divisível por 5, mas não por 2 é..........
2. Os menores valores de *a* de modo que os números 52 *a* 4, 4 *a* 5 e 12 *a* 8, sejam divisíveis por 3 são, respectivamente ....,.... e ......
3. O menor valor de *a* no número 73 *a* 2 para que o resto da divisão por 11 seja 3 é..........
4. O menor número que se deve subtrair de 58 497 para que o resto da divisão por 11 seja 2 é..........
5. O menor número que se deve somar a 1 234 para obter um múltiplo de 8 é..........

6. O menor número que se deve somar a 8 746 para obter um múltiplo de 11 aumentado de 4 unidades é ....
7. Os valores de *a* e *b* para que o número 48*ab* seja, ao mesmo tempo, divisível por 9 e por 10 são......e......
8. Substitua a letra *a* por um algarismo de modo que os seguintes números sejam divisíveis, ao mesmo tempo, por 2 e por 9: 45*a*, 124*a*, 2 028*a*.
9. Verifique se o número 4 551 é divisível por 123.
10. A lista completa dos divisores de 18 é.............

RESPOSTAS:

1. 5 2. 1, 0, 1 3. 6 4. 8 5. 6 6. 3 7. 6 e 0
8. 0, 2, 6 9. 10. 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Números primos e compostos. Decomposição e aplicações

10. *Número primo. Número composto*

Todo número é divisível por si próprio e pela unidade. O número 7, por exemplo, admite apenas os divisores 1 e 7. Nós dizemos que êle é **primo**.

> **Número primo é o que só admite como divisores êle próprio e a unidade.**

Os números 1, 2, 7 e 17 são *primos*.

O número que não é primo diz-se **composto.**

O número 6 é *composto*. Além de 1 e 6, admite os divisores 2 e 3.

11. *Tábua de números primos. Crivo de Eratóstenes*

Seja organizar uma tábua de números primos até 100. Como os números pares a partir de 4 não são primos, pois são divisíveis por 2, organizemos a lista dos números naturais a partir de 2, excluindo os pares a partir de 4:

2	3	5	7	9	11	13	15	17	19
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95	97	99

Suprimimos em seguida, os múltiplos de 3 que ainda restam; o primeiro é 9 e daí, riscamos de 3 em 3.

Do mesmo modo procedemos com os múltiplos de 5; o primeiro é 25. Do mesmo modo com o número 7; o primeiro a riscar é 49. Chegando a 11 o primeiro número a suprimir seria $11 \times 11 = 121$, pois os múltiplos prescedentes de 11, como 11×3, 11×5 etc., já estão suprimidos. Como 121 está fora de tabela, concluímos que os números restantes são primos.

NÚMEROS PRIMOS DE 1 a 100

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97.	

Excluímos o número 1, que é primo, por não interessar nas aplicações.

12. *Números compostos*

Todo número composto admite, pelo menos, **três** divisores. O número 9, por exemplo, tem os divisores 1, 9 e 3. Assim, todo número composto admite divisores menores que êle. O menor dêsses divisores, excluído o número 1, é **sempre primo,** pois, ao contrário, êle admitiria divisores

que também seriam divisores do número dado; êste teria, então, divisores menores que o seu menor divisor, o que é impossível.

Todo número que não é primo, admite pelo menos um divisor primo diferente da unidade.

Exemplo:

O menor divisor de 27, diferente de um, é o número primo 3.

13. *Reconhecer se um número dado é primo*

1.º) *Um caráter de divisibilidade* permite achar imediatamente um divisor simples. Exemplos:

333 tem o divisor 3, logo não é primo
1 205 tem o divisor 5, logo não é primo

Um número *par* não é primo; tem o divisor *2*.

2.º) *O número dado é menor que 100 e ímpar.*

Neste caso, podemos utilizar a tabela de números primos até 100 ou utilizar a regra do parágrafo seguinte. Exemplos:

19 é primo (está na tabela)
91 não é primo.

3.º) *O número dado é um número ímpar maior que 100.*

Primeiro exemplo: *Seja o número 391.*

Se êle não fôr primo, admitirá um divisor primo.

Ensaiamos, então, a divisão pelos números primos a partir de 2:

DIVISOR	QUOCIENTE	RESTO	
2	—	—	Utilizamos os caracteres de divisibilidade.
3	—	—	
5	—	—	
7	55	6	
11			(Utilizamos o caráter de divisibilidade).
13	30	1	
17	23	0	

O número 391 *não é primo*. É divisível por 17 e por 23.

Segundo exemplo: *Seja o número 223*.
As divisões pelos números primos a partir de 2 são:

DIVISOR	QUOCIENTE	RESTO	
2	—	—	Utilizamos os caracteres de divisibilidade.
3	—	—	
5	—	—	
7	31	6	
11	—	—	Utilizamos o caráter de divisibilidade
13	17	2	
17	13	2	

Na divisão por 17 o quociente é 13, *número menor que o divisor*.

Podemos concluir que 223 **é primo**. Realmente, se 223 fôsse divisível por um número maior que 17, o quociente, menor que 13, seria também um divisor, o que é impossível, pois já verificamos todos os divisores menores que 13.

Daí, a *regra:*

Para reconhecer se um número é primo divide-se pela sucessão dos números primos a partir de 2:

1.º) Se uma das divisões fôr exata, o número é composto.

2.º) Se nenhuma divisão fôr exata até a que fornece um quociente igual ou menor que o divisor, o número é primo.

14. *Decomposição em fatôres primos*

Todo número que não é primo pode ser decomposto em um produto de fatôres primos.

Seja, por exemplo, o número 90.

Sendo composto, o número 90 admite pelo menos um divisor primo; verificando ser 2 um divisor, escreve-se:

$$90 = 2 \times 45$$

Se o quociente fôsse primo a decomposição estaria obtida. Como 45 não é primo, obtém-se anàlogamente, considerando o divisor primo 3;

$$45 = 3 \times 15$$

e, portanto, $90 = 2 \times 3 \times 15$

O quociente 15 não é primo; procede-se com êle da mesma forma

$$15 = 3 \times 5$$

e, portanto, $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

ou, abreviando $90 = 2 \times 3^2 \times 5.$

Dispõe-se ordinàriamente o cálculo de forma que os quocientes das divisões sucessivas são colocados abaixo dos dividendos, sendo os *divisores primos* colocados à direita de um traço vertical, como se vê na disposição ao lado.

90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Observação: A decomposição abrevia-se, e pode mesmo ser obtida mentalmente, utilizando-se divisores não primos, que se decompõem em seguida em fatôres primos, como indicam os exemplos seguintes:

1.º) $42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$

2.º) $720 = 8 \times 9 \times 10$
$= 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5$
$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

3.º) $18\,000 = 18 \times 1\,000$
$= (2 \times 9)\ (2^3 \times 5^3)$
$18\,000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$

15. *Aplicações*

1. O menor número primo de 2 algarismos é ....
2. O menor número primo de 2 algarismos diferentes é ....
3. Os números primos compreendidos entre 85 e 102 são ....
4. O menor número primo de três algarismos diferentes é ....
5. O menor divisor primo de 205 é ....
6. Verifique, por um dos caracteres de divisibilidade, que os seguintes números não são primos: 15, 21, 22, 27, 45, 56, 165.
7. Verifique quais dos seguintes números são primos: 197, 211, 377, 321, 499, 881, 697, 637, 1 203 e 187.
8. Decomponha em fatôres primos os números: 18, 36, 48, 104, 108, 252, 315, 697, 1 012, 2 366, 3 332, 6 005, 7 117.

16. *Divisores de um número*

Consideremos o número 168 decomposto em fatôres primos

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

Qualquer número, obtido com a reunião de um certo número de fatôres do segundo membro, será um divisor de 168. Assim, se reunirmos dois fatôres 2 e um fator 3, obteremos

$$168 = (2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 7)$$

ou

$$168 = 12 \times 14$$

E, portanto, 12 é um *divisor* de 168 ou 168 é *múltiplo* de 12.

Podemos concluir:

Um número é divisor de outro, quando contém apenas fatôres dêsse outro, com expoentes menores ou iguais.

Exemplos:

1.º) Um número é divisível por 12 quando fôr divisível por 4 e por 3. O número 168 é divisível por 12 porque $12 = 2^2 \times 3$ e 168 é divisível por 2^2 ou 4 e por 3.

2.º) Para que um número seja divisível por $6 = 2 \times 3$, é necessário que seja divisível por 2 e por 3.

3.º) Para que um número seja divisível por 15, é necessário que o seja por 3 e por 5. O número 135 é divisível por 15.

4.º) *Verificar, decompondo em fatôres primos, se o número 1 620 é divisível por 108.*

Temos $1\,620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$

e $108 = 2^2 \times 3^3$

Como 108 contém apenas os fatôres 2 e 3 de 1 620, com expoentes respectivamente menor e igual, concluímos que 108 é divisor de 1 620.

5.º) *Qual o menor número inteiro pelo qual devemos multiplicar 192, para obter um produto múltiplo de 80?*

Decompondo os dois números, obtemos

$$192 = 2^6 \times 3$$
$$80 = 2^4 \times 5$$

O único fator de 80 que não figura em 192 é 5. Concluímos ser 5 o menor número que, multiplicado por 192, fornece um produto múltiplo de 80.

17. *Determinação de todos os divisores de um número*

Seja o número 72, cujos divisores queremos determinar.

Os divisores serão todos os números que contiverem apenas fatôres de 72, com expoentes menores ou iguais. Ora,

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

logo, os divisores serão todos os números obtidos com os fatôres 2 e 3, em conjunto ou isolados, elevados, no máximo aos expoentes 3 e 2, respectivamente.

Assim, incluindo a unidade, com o fator 2 formaremos os divisores: 1, 2, 4, 8

e com o fator 3: 1, 3, 9

Multiplicando cada um dos números da segunda linha por todos da primeira, os produtos obtidos constituirão todos os divisores de 72, que são:

1, 2, 4, 8 (produtos da primeira linha por 1)
3, 6, 12, 24 (produtos por 3)
9, 18, 36, 72 (produtos por 9)

Na prática, usa-se o dispositivo seguinte:

		1
72	2	2
36	2	4
18	2	8
9	3	3, 6, 12, 24
3	3	9, 18, 36, 72
1		

À direita de cada fator primo, escrevem-se os produtos que se obtêm, multiplicando-o pelos divisores escritos acima.

18. *Número de divisores*

Na pesquisa dos divisores de um número, como fizemos acima para o número $72 = 2^3 \times 3^2$, formamos o quadro:

1, 2, 4, 8
1, 3, 9

e multiplicamos os da primeira linha pelos da segunda.

Ora, como o expoente do fator 2 é 3, a primeira linha encerra 3 + 1 números e, como o expoente do fator 3 é 2, a segunda linha encerra 2 + 1 números; logo, encontraremos

$$(3 + 1)\ (2 + 1)$$

produtos diferentes, que são os divisores.

Do exposto conclui-se:

O número de divisores de um número obtém-se somando uma unidade aos expoentes de seus fatôres primos e multiplicando os resultados obtidos.

Exemplo:

Determinar o número de divisores de 360.

Decompondo 360 em seus fatôres primos obtemos:

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

logo, o número de seus divisores será:

$$(3 + 1)\ (2 + 1)\ (1 + 1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

O número 360 tem 24 divisores.

19. *Aplicações*

1. **Verificar se o número 378 é divisível por 15 e por 18, sem efetuar a divisão.**
2. **Qual o menor número pelo qual se deve multiplicar 80, para obter um produto múltiplo de 75?**
3. **Quantos divisores tem o número 324?**
4. **Determinar todos os divisores de 840, calculando prèviamente o número dêles.**
5. **Qual o expoente que deve ter o fator 5 no produto $2^2 \times 5$, para que o número formado tenha 9 divisores?**

6. Verificar se o número 714 é divisível por 6, sem efetuar a divisão.
7. Achar os divisores de 180, maiores que 6 e menores que 19.
8. Achar os divisores de 60, que não são primos.
9. Achar os três maiores divisores de 240.
10. Achar os três menores divisores de 72, diferentes da unidade.

RESUMO

1. **Número primo é o que só admite como divisores êle próprio e a unidade.**
2. **Todo número que não é primo admite pelo menos um divisor primo, diferente da unidade.**
3. **Todo número composto pode ser decomposto em um produto de fatôres primos.**
4. **Um número é divisor de outro quando contém apenas fatôres dêsse outro com expoentes menores ou iguais.**
5. **O número de divisores de um número é igual ao produto dos expoentes dos fatôres primos, aumentados de uma unidade.**

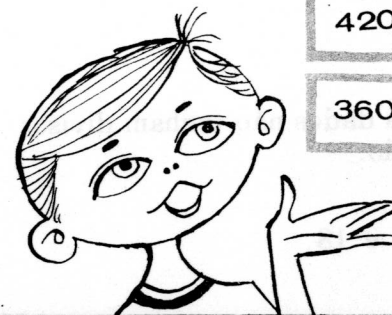
EXERCÍCIOS DA SUBUNIDADE

1. Decomponha em fatôres primos o produto 30×12.
2. Determinar todos os divisores de 494 e 663.
3. Verificar, pela decomposição em fatôres primos, se o número 720 é divisível por 45.
4. Achar o número $2^x \times 7$ que tem 9 divisores.
5. Se um número fôr divisível por 4 e por 9, será também por ______ porque 4 e 9 são ____________.
6. A soma dos expoentes dos fatôres primos do número 300 é _________.
7. O número 240 tem ______ divisores.
8. Os divisores de 180 são ____________.
9. Os divisores ímpares de 240 são ____________.
10. O valor de x no número $2^x \times 3^2 \times 5$, para que o mesmo tenha 18 divisores é ____________.
11. Os divisores compostos de 120 são _________.

12. Os divisores primos de 360 são _________.
13. Os três maiores divisores de 180 são _________.
14. Achar os números de 6 divisores, cujos fatôres primos são 2 e 3.
15. Achar os valores dos dois maiores números que dividem ao mesmo tempo 112 e 120.

RESPOSTAS:

1. $2^3 \times 3^2 \times 5$ 2. 1, 2, 13, 19, 26, 38, 247, 494 e 1, 3, 13, 17, 39, 51. 221, 663. 3. Sim. 4. 196 5. 36, são primos entre si. 6. 5, 7. 20 8. 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180. 9. 1, 3, 5, 15. 10. 2 11. 4, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 e 120. 12. 1, 2, 3, 5. 13. 180, 90 e 60. 14, 12 e 18. 15. 4 e 8.

10

Máximo divisor comum

20. *Divisor comum*

Divisor comum é o número que divide exatamente dois ou mais números dados.

Assim, 3 é divisor comum de 15 e 18. 5 é divisor comum de 40, 75 e 80.

21. *Máximo divisor comum*

É o maior de todos os divisores comuns de dois ou mais números. Exemplo:

Os divisores de 12 são: 1, 2, 3, 4, *6* e 12
Os divisores de 18 são: 1, 2, 3, *6*, 9 e 18
Os divisores comuns são: 1, 2, 3 e *6*.

O máximo divisor comum de 12 e 18 é *6*

Representa-se pela notação:

***m.d.c.* (*12*,*18*) = *6*.**

22. *Números primos entre si*

Pode acontecer que os números dados não tenham divisor comum, além da unidade. Exemplo:

Os divisores de 18 são:

1, 2, 3, 6, 9 e 18

Os divisores de 35 são:

1, 5, 7 e 35

Os números 18 e 35 não têm divisor comum, além da unidade. Diz-se então que êsses números são **primos entre si.**

● ***Dois números são primos entre si quando só têm como divisor comum a unidade.***

23. *Determinação do m.d.c. de dois ou mais números*

PRIMEIRO PROCESSO. *Da decomposição em fatôres primos.*

Sejam os números 240, 360 e 420, cujo m.d.c. queremos determinar.

Decompondo-os em fatôres primos, temos:

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$
$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$
$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

O m.d.c. procurado deve dividir os três números dados e ser o maior possível. Seus fatôres primos devem, pois, figurar nos três números dados. São, pois, os fatôres 2, 3 e 5. Para que o divisor seja o maior possível é preciso atribuir a êstes fatôres o expoente maior possível. Os expoentes maiores possíveis são:

2 para o fator *2*, sem o que não seria divisor de 420
1 para o fator *3*, sem o que não seria divisor de 240
1 para o fator 5.

Conclui-se

$$\text{m.d.c. } (240, 360, 240) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60.$$

Daí, a *regra* para achar o m.d.c.:

● ***O m.d.c. de dois ou mais números obtém-se, multiplicando os fatôres primos comuns com os menores expoentes.***

OBSERVAÇÃO: Quando os números têm um único fator primo comum, êste será o m.d.c., que se determina à simples vista. Exemplos:

m.d.c. (9, 12, 18) = 3
m.d.c. (44, 77, 110) = 11
m.d.c. (21, 28, 35) = 7

24. *Propriedades importantes do m.d.c.*

PRIMEIRA. Os divisores comuns de vários números são formados pelos fatôres primos comuns, logo êstes fatôres figuram no m.d.c. que contém todos os fatôres, portanto:

● ***Os divisores comuns de vários números são os divisores de seu m.d.c.***

Exemplo:

Achar os divisores comuns dos números 180 e 240.

Temos

m.d.c. (180, 240) = 60.

Os divisores comuns de 180 e 240 são, pois, os divisores de 60:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

SEGUNDA PROPRIEDADE. Se multiplicarmos dois ou mais números por um terceiro, introduziremos nesses números os fatôres do terceiro que vão, portanto, figurar no m.d.c. Podemos, então, concluir:

● *Se multiplicarmos ou dividirmos dois números por um terceiro, seu m.d.c. fica multiplicado ou dividido por êste terceiro.*

Exemplos:

1.º) O m.d.c. de 18 e 24 é 6. O m.d.c. de 18×5 ou 90 e 24×5 ou 120, será 6×5 ou 30.

2.º) *Seja achar o m.d.c. de 1 800 e 2 400.*

Suprimindo os zeros, acharemos o m.d.c. de 18 e 24 que é 6. Êste m.d.c. ficou dividido por 100. Logo temos

m.d.c. (1 800, 2 400) = 600

Observa-se, dêsse modo, uma simplificação na pesquisa do m.d.c.

25. *Aplicações*

● **Calcule o m.d.c. dos seguintes números, decompondo-os em fatôres primos**

1. 15, 25 e 60 — **4. 15, 30 e 45** — **7. 165, 231 e 550**
2. 21, 35 e 63 — **5. 18, 24 e 42** — **8. 220, 300 e 630**
3. 13, 26 e 91 — **6. 108, 144 e 216** — **9. 792, 1 056 e 1 848**

● **Determine os divisores comuns dos números**

10. 144 e 108 — **11. 1 080 e 1 386**

● **Determine o número de divisores comuns de**

12. 1 340 e 804 — **13. 408, 1 136 e 2 840**

● **Complete as lacunas**

14. O m.d.c. de dois números é 11. Se multiplicarmos os dois números por $2^3 \times 5$, o m.d.c. dos produtos obtidos será..........

15. O m.d.c. de três números é 96. Se dividirmos cada um dos três números por $2^4 \times 3$, o m.d.c. dos quocientes obtidos será..........

Respostas:

1. 5. **2.** 7. **3.** 13. **4.** 15. **5.** 6. **6.** 36. **7.** 11. **8.** 10. **9.** 264. **10.** 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36. **11.** 1, 2, 3, 6, 9 e 18. **12.** 6. **13.** 4. **14.** 440 **15.** 2.

26. *Determinação do m.d.c.*

Segundo processo. *Algoritmo de Euclides.*

Primeiro caso: **O número maior é divisível pelo menor.**

Suponhamos achar o m.d.c. de 18 e 9. Como 9 divide 18, conclui-se que é um *divisor comum*. E é o maior, pois devendo dividir 9 não lhe pode exceder. Temos, então:

m.d.c. (18, 9) = 9.

Assim, quando o número maior é divisível pelo menor, o m.d.c. é o menor dêles.

Segundo caso: **O número maior não é divisível pelo menor.**

Seja achar o m.d.c. de 731 e 697.

Efetuando a divisão temos: $731 = 697 \times 1 + 34$.

Ora, *todo divisor comum* de 731 e 697 dividirá 34 porque, dividindo a soma e uma parcela, dividirá a outra parcela. Recìprocamente, *todo divisor* de 697 e 34 dividirá 731, pois, dividindo as parcelas dividirá a soma. Assim, os divisores comuns de 731 e 697 são os mesmos de 697 e 34; logo, temos:

m.d.c. (731, 697) = m.d.c. (697, 34).

Procedendo anàlogamente, dividiremos 697 por 34:

$$697 = 34 \times 20 + 17$$

e concluiremos:

m.d.c. (697, 34) = m.d.c. (34, 17)

A divisão de 34 por 17 é exata:

$$34 = 17 \times 2,$$

e, portanto, 17 é o m.d.c. procurado, isto é:

m.d.c. (731, 697) = 17.

Para efetuar as divisões sucessivas usa-se o dispositivo prático seguinte, denominado *algoritmo de Euclides*.

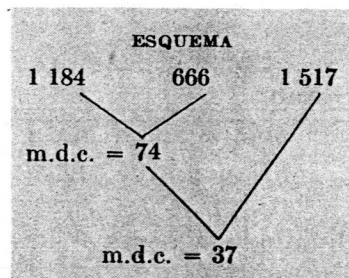
	1	20	2	quocientes
731	697	34	17	divisores
34	17	0		restos

27. *M.d.c. de mais de dois números*

Seja achar o m.d.c. de 666, 1 184 e 1 517.

Em virtude da primeira propriedade, os divisores comuns de 666 e 1 184 são divisores de seu m.d.c.

Logo, na pesquisa dos divisores comuns, podemos substituir êsses dois números pelo seu m.d.c. que é:

	1	1	3	2
1 184	666	518	148	74
518	148	74	0	

Assim: m.d.c. (1 517, 1 184, 666) = m.d.c. (74, 1 517)
Calculemos, então, o m.d.c. de 74 e 1 517.

	20	2
1 517	74	37
37	0	

Conclui-se: m.d.c. (1 517, 1 184, 666) = 37.

28. *Aplicações*

- Determine o m.d.c. dos seguintes números, pelo algoritmo de Euclides:

1. 793 e 915
2. 790 e 1 106
3. 406, 435 e 493
4. 315, 1 953 e 2 268

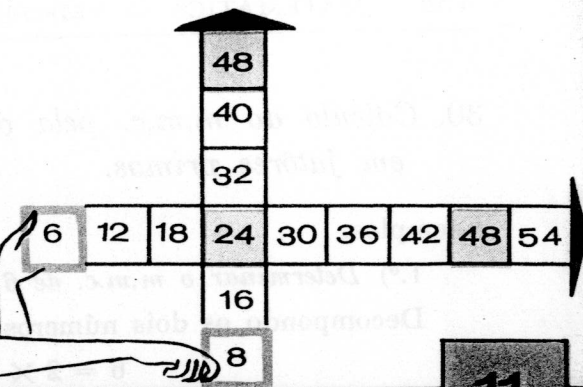
- Resolva:

5. Os três maiores divisores comuns de 720, 1 152 e 1 296 são ....
6. O maior número pelo qual devemos dividir 301 e 411 para que os restos sejam, respectivamente, 5 e 4 é ....
7. Preencha os claros no seguinte algoritmo de Euclides:

	1	2	1	2	
×	×	×	×	6	
×	×	×	0		

8. O m.d.c. de dois números é 48 e os quocientes encontrados na pesquisa por divisões sucessivas são 1, 3, 2. Ache os dois números.
9. Qual o maior número pelo qual devemos dividir 243 e 391 a fim de obter os restos 3 e 7, respectivamente?
10. Quais são os dois menores números pelos quais devemos dividir 264 e 168 a fim de obter quocientes iguais?

RESPOSTAS:

1. 61 2. 158 3. 29 4. 63 5. 144, 72, 48
6. 37 7. 48 e 66 8. 432 e 336 9. 48 10. 11 e 7.

Mínimo múltiplo comum

29. *Definição*

Formemos o conjunto dos múltiplos de 8 e o dos múltiplos de 12 excluído o zero.

MÚLTIPLOS DE 8	MÚLTIPLOS DE 12
8	12
16	24
24	36
32	48
40	60
48	72
etc.	etc.

Nas duas relações encontramos *números comuns* que são, portanto, *múltiplos comuns:*

24, 48 etc. . . .

Os múltiplos comuns se sucedem aumentando indefinidamente. O menor é 24 e chama-se *mínimo múltiplo comum*. Representa-se pela notação:

$$\text{m.m.c. } (8, 12) = 24.$$

30. *Cálculo do m.m.c. pela decomposição em fatôres primos.*

Exemplos:

1.º) *Determinar o m.m.c. de 6 e 15.*

Decompondo os dois números em fatôres primos, temos:

$$6 = 2 \times 3$$
$$15 = 3 \times 5$$

Ora, para que um número seja múltiplo de outro, deve conter *todos* os fatôres dêsse outro. Assim, para ser múltiplo de 6, deve ter, *pelo menos*, os fatôres 2 e 3; e para o ser de 15, deve ter da mesma forma os fatôres 3 e 5. Logo, para ser múltiplo comum de 6 e 15, deve ter, *pelo menos*, os fatôres 2, 3 e 5. Tomando os fatôres estritamente necessários, formaremos o *menor* número que satisfaz a condição, que é, portanto,

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

Então: m.m.c. (15, 6) = 30.

2.º) *Determinar o m.m.c. de 24 e 36.*

Raciocinando como no exemplo anterior, temos:

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$36 = 2^2 \times 3^2$$

Para um número ser múltiplo, ao mesmo tempo, de 24 e 36, deve conter, *pelo menos*, *três* fatôres 2 e *dois* fatôres 3.

Assim: m.m.c. (24, 36) $= 2^3 \times 3^2 = 72$.

Daí a regra:

O m.m.c. de dois ou mais números obtém-se, multiplicando todos os fatôres primos, considerados uma única vez e com os maiores expoentes.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) Se dois ou mais números forem *primos entre si dois a dois*, cada um conterá fatôres que não figuram em nenhum dos outros, e, portanto, o m.m.c. será o *produto dêles*. Exemplos:

O m.m.c. de 5 e 7 é 35. O m.m.c. de 3, 2 e 5 é 30.

2.ª) Podemos extrair ao mesmo tempo os fatôres que formam o menor múltiplo comum, colocando os números dados numa linha horizontal e dividindo-os simultâneamente pelos fatôres primos comuns e, separadamente, pelos não comuns, até que todos os quocientes obtidos sejam iguais a um. Exemplo:

Determinar o m.m.c. de 36, 45 e 54.

36,	45,	54	2
18,	45,	27	2
9,	45,	27	3
3,	15,	9	3
1,	5,	3	3
	5,	1	5
	1		

O m.m.c. é: $2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$.

31. *Múltiplos comuns*

Um múltiplo comum qualquer de dois ou mais números deve conter *todos* os fatôres de cada um dêles, logo, conterá os fatôres do m.m.c. dos mesmos números e será também múltiplo dêsse menor múltiplo comum. Assim, para determinar os múltiplos comuns de dois ou mais números, determinaremos o m.m.c. e formaremos seus múltiplos. Exemplo:

Determinar os três menores múltiplos comuns de 12 e 18.

Determinando o m.m.c. obtemos:

$$12 = 2^2 \times 3$$
$$18 = 2 \times 3^2$$

logo: m.m.c. (12, 18) $= 2^2 \times 3^2 = 36$.

Os três menores múltiplos comuns são: 36×1, 36×2 e 36×3, ou 36, 72 e 108.

32. *Relação entre o m.d.c. e o m.m.c.*

Sejam os números:

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

Representando por D o m.d.c. e por m o m.m.c., teremos:

$$D = 2 \times 3$$
$$m = 2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

logo, seu produto será:

$$m \times D = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

ou, reunindo os fatôres de modo a obter os números dados:

$$m \times D = (2 \times 3 \times 5)\ (2 \times 3 \times 7)$$

isto é, $m \times D = 30 \times 42.$

Conclui-se a relação:

> **O produto de dois números é igual ao produto de seu m.d.c. pelo seu m.m.c.**

Dessa relação pode-se concluir uma regra para calcular o m.m.c. por intermédio do m.d.c.

Realmente, a última igualdade permite concluir:

$$m = \frac{30 \times 42}{D}$$

Daí a *regra:*

> **O m.m.c. de dois números obtém-se dividindo seu produto pelo m.d.c.**

Exemplo:

Determinar o m.m.c. de 518 e 1 517.

Determinemos, primeiro, o m.d.c.:

	2	1	13
1 517	518	481	37
481	37	91 0	

m.d.c. (1 517, 518) = 37;

logo, m.m.c. $(1\,517,\ 518) = 1\,517 \times \frac{518}{37} = 1\,517 \times 14$

donde, m.m.c. (1 517, 518) = 21 238.

Observação: **Para determinar o m.m.c. de mais de dois números por intermédio do m.d.c., determina-se primeiramente entre dois dêles, depois determina-se entre o m.m.c. encontrado e um terceiro, e assim sucessivamente.**

33. *Aplicações*

- **Calcule o m.m.c. dos seguintes números**

1. 8, 24 e 35
2. 36, 54 e 72
3. 108, 144 e 216
4. 72 e 252
5. 22, 30 e 63.

- **Resolva:**

6. Quais os múltiplos comuns de 24, 30 e 36, que não excedem de mil?

7. Três viajantes seguiram hoje para Barbacena! O mais jovem viaja com o mesmo destino de 15 em 15 dias, o segundo, de 20 em 20 dias e o mais velho, de 24 em 24 dias. Daqui a quantos dias viajarão novamente juntos?

8. Achar o menor múltiplo de 13 que, dividido por 15, 24 ou 40 deixa sempre resto 10.

9. Num circuito automobilístico dois corredores saem juntos. Um dêles faz cada volta em 12 minutos e o outro em 15. Quantos minutos terão decorrido quando o mais veloz ficar exatamente uma volta na frente? Quantas voltas terá dado cada um?

10. Uma estrada circular tem 18 estações. Um trem parte da estação inicial e faz parada de 8 em 8 estações. Quantas voltas terá dado na estrada quando fizer nova parada na estação inicial?

RESPOSTAS:

1. 840 3. 432 5. 6 930 7. 120 dias 9. 60 min, 4 e 5
2. 216 4. 504 6. 360 e 720 8. 130 10. 4 voltas

Exercícios de revisão da unidade II

Exercícios para a primeira prova parcial

Preencha as lacunas:

1. O maior número de cinco algarismos divisível ao mesmo tempo por 5 e 9 é............
2. O algarismo pelo qual se deve substituir a letra a em $67a34$ para que se obtenha um múltiplo de 9 é ....
3. O menor número que se deve subtrair de 432 851 para que o resultado seja múltiplo de 11 é ....
4. Sublinhe com um traço os múltiplos de 3, com dois traços os múltiplos de 5 e com três traços os múltiplos de 11 : 305 – 456 – 891 – 103.
5. O maior valor de m para que $2^m \times 3$ seja divisor de 504 é.........
6. Os menores valores de m e n para que $2^m \times 3^n \times 5$ seja múltiplo de 108 são......e......
7. Decompondo o número 270 em fatôres primos obtém-se.........
8. Os fatôres primos comuns aos números 108 e 600 são.........
9. Os números primos com 15, compreendidos entre 39 e 47, são......
10. Os dois números maiores que 5 e menores que 10, primos entre si, que não são primos absolutos, são............
11. O valor de m no número $2^m \times 3^2$ para que o mesmo tenha 15 divisores é............
12. Os divisores pares de 180 são............
13. Os divisores ímpares de 240 são............

14. O m.d.c. dos números 1 547 e 2 093 é..........

15. O m.d.c. dos números 567 e 945 é..........

16. Os valores de m e n para que o m.d.c. de $2^m \times 3^3 \times 5^2$ e $2^3 \times 3^n \times 5^3$ seja $2^2 \times 3 \times 5^2$ são..........

17. Sendo $a = 2^2 \times 3^3 \times 5$ e $b = 2^3 \times 3^2 \times 11$, o quociente da divisão de seu m.m.c. pelo seu m.d.c. será..........

18. O produto de dois números é 2 430 e o m.d.c. é 9; logo, seu m.m.c. será..........

19. Os quatro menores múltiplos comuns de 56 e 60 são..........

20. Os menores números pelos quais devemos dividir 720 e 288 para obter quocientes iguais são..........

Resolva:

21. A soma de três múltiplos consecutivos de 9 é 2 727. Quais são os números? *Resp.:* 900, 909 e 918.

22. Achar o menor número que, dividido por 20, por 25 e por 30, deixa sempre resto 8. *Resp.:* 308.

23. Dividindo-se dois números por 7, o seu m.d.c. passou a ser 29. Achar os números, sabendo que um é o dôbro do outro. *Resp.:* 203 e 406.

24. Achar os dois menores números que, multiplicados respectivamente por 40 e 45, dão produtos iguais. *Resp.:* 9 e 8.

25. Um automobilista dá a volta em uma pista circular em 12 minutos e um motociclista em 18 minutos. Partem os dois ao mesmo tempo às 8 horas. A que horas voltam a encontrar-se no ponto de partida e quantas voltas dá cada um? *Resp.:* 8h 36 min., 3 e 2.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO DAS DUAS PRIMEIRAS UNIDADES

Complete as lacunas:

1. O número 567 894 tem...... dezenas,...... unidades de 3.ª ordem e.......... meios milhares.

2. Cem unidades de 2.ª ordem formam 10 unidades de..........ordem.

3. Se o algarismo 5, em certo número, ocupa a 5.ª ordem, seu valor relativo será..........

4. O número 578 contém..........meias centenas.

5. 500 unidades de 2.ª ordem equivalem a..........meias dezenas ou a......unidades de 5.ª ordem.

6. A diferença entre a soma dos valores absolutos dos algarismos do número 2 345 e a soma de seus valores relativos é..........

7. Para formar meia unidade de 5.ª ordem preciso de..........unidades de 3.ª ordem ou de..........dezenas.

8. Jurema escreveu todos os números inteiros de 3 e 4 algarismos e os..........primeiros números de 5 algarismos, escrevendo ao todo 40 855 algarismos.

9. Do número.........., inclusive, até 3 247 há 438 números inteiros e consecutivos.

10. Do menor número de 2 algarismos ao maior número de 4 algarismos, incluídos êsses números, há......números e, ao escrevê-los, empregaremos..........algarismos.

11. Numa soma de três parcelas, se aumentarmos a 1.ª de 5 unidades e diminuirmos a 2.ª de 13, para que a nova soma seja 15 unidades maior que a soma dada, devemos aumentar a 3.ª parcela de...... unidades.

12. A soma de 3 números é 2 048. Se a soma dos dois primeiros é 1 368 e a soma dos dois últimos, 1 228, os números serão......,......, e......

13. Se somarmos 4 unidades de 4.ª ordem ao minuendo e subtrairmos 2 unidades de 3.ª ordem ao subtraendo, o resto ficará..........de..........unidades de 2.ª ordem.

14. A soma dos três números de uma subtração é 308. O resto excede o subtraendo de 30 unidades. O subtraendo é..........

15. Dividi o dividendo de uma divisão por 45 e multipliquei o divisor por 2. Encontrei para novo quociente 1 080. O quociente primitivo era..........

16. A soma do divisor com o quociente é 30 e o divisor excede o quociente de 8 unidades. Se o resto é o maior possível, o dividendo dessa divisão será..........

17. A soma dos três números que figuram numa subtração é 128. O resto é o triplo do subtraendo. O subtraendo é..........

18. Os fatôres primos comuns aos números 108 e 600 são..........

19. Os números primos com 15, compreendidos entre 29 e 37, são..........

20. O m.d.c. dos números $2^2 \times 3 \times 5$ e $2^3 \times 3^2 \times 5$ é..........

21. O m.d.c. de $2^m \times 3^3 \times 5$ e $2^3 \times 3^n \times 7$ será $2^2 \times 3^3$ se m fôr igual a.......... e n igual a..........

22. Os três menores divisores comuns de 330 e 440 são......e os dois maiores são..........

23. O m.d.c. de 2 números é 80 e o m.m.c. é 960. Se um dos números é 240, o outro será..........

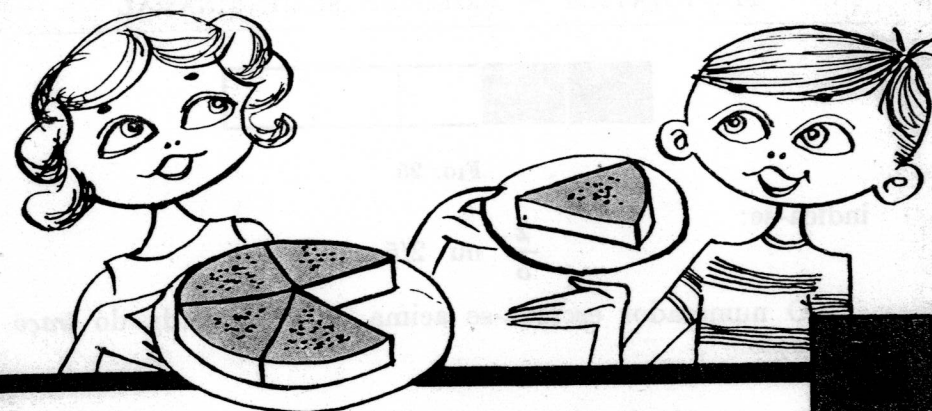
24. Os números de 3 algarismos, inferiores a 500, divisíveis ao mesmo tempo por 18 e 24 são.........
25. Os dois menores números que, multiplicados respectivamente por 36 e 63 dão produtos iguais são.........e.........

Calcule:

26. $3(14 : 2 - 7+5) - (3 \times 5 - 9) : 3 - 105 : 3 : 7$ *Resp.:* 8
27. $[108 : (9 \times 4) + 40 : 10 - 3] \times (6 \times 3 - 8) + (51 - 3+1) : 7$ *Resp.:* 47
28. $(-2)^2 \times (-5) + (-7 \times 3 + 8) \times 2$ *Resp.:* -46.

Resolva:

29. Luís Eduardo escreveu os números pares de 40 até 1 265. Quantos algarismos escreveu? *Resp.:* 1 942.
30. Escreve-se a série dos números até 10 000, inclusive. Quantos algarismos foram escritos? *Resp.:* 38 894.
31. Elisa escreveu desde 1 até certo número, empregando ao todo 2 634 algarismos. Até que número escreveu? *Resp.:* 914.
32. Numerando as páginas de um livro, Norma empregou 1 236 algarismos. Quantas páginas tinha o livro? *Resp.:* 448 páginas.
33. Escrevendo-se a sucessão dos números naturais sem separar os algarismos, 1234567891011 . . . , qual o algarismo que ocupará o 561.º lugar? *Resp.:* 3.
34. Escrevendo-se a sucessão dos números naturais sem separar os algarismos, 1234567 . . . , o último algarismo ocupou o 1 236.º lugar. Qual o último número escrito? *Resp.:* 448.
35. O dividendo de uma divisão é 183, o quociente é 7, e o resto, maior possível. Achar o resto e o divisor. *Resp.:* 22 e 23.
36. A soma de dois números é 223. Dividindo-se o maior pelo menor encontra-se o quociente 5 e o resto maior possível. Achar os dois números. *Resp.:* 191 e 32.
37. A diferença de dois números é 286. Dividindo-se o maior pelo menor encontra-se quociente 7 e o resto maior possível. Achar os dois números. *Resp.:* 327 e 41.
38. A metade da soma de dois números é 51. Dividindo o maior pelo menor o quociente é 4 e o resto, 2. Achar os dois números. *Resp.:* 82 e 20.
39. Pedro tem o triplo da idade de João que é 16 anos mais môço. Qual a idade de cada um? *Resp.:* 8 e 24.
40. Pedrinho tem 10 anos e seu tio tem o quádruplo da idade de Pedrinho. No fim de quantos anos a idade do tio será o triplo? *Resp.:* 5 anos.

41. O produto de 2 números é 594. Se subtrairmos 5 unidades do multiplicando, o produto reduz-se a 429. Achar os dois números. *Resp.:* 18 e 33.
42. A soma de dois números é 95. A diferença é igual ao triplo do menor. Achar os dois números. *Resp.:* 76 e 19.
43. Uma pessoa deve dividir 6 600 por 15, o quociente por 8 e o novo quociente por 5. Poderá efetuar uma única divisão? Qual o divisor e o quociente? *Resp.:* Sim. 600 e 11.
44. Nadir possuía 40 discos mais do que Regina. Nadir deu 5 discos à Regina e ficou, ainda, com o triplo do número de discos de Regina. Quantos tinha cada uma? *Resp.:* 50 e 10.
45. Antônio e João tinham ao todo Cr$ 1 800,00. Antônio gastou Cr$ 500,00 e João, Cr$ 300,00. O primeiro ficou com o quádruplo do segundo. Quanto tinha cada um? *Resp.:* Cr$ 1 300,00 e Cr$ 500,00.
46. Flávio e Fernando tinham ao todo Cr$ 800,00. Fernando deu Cr$ 50,00 a Flávio e ficou, ainda, com o quádruplo da quantia de Flávio. Quanto tinha cada um? *Resp.:* Cr$ 690,00 e Cr$ 110,00.
47. Dois barris contêm juntos 240 litros de vinho. Se tirarmos 20 litros de cada um, o conteúdo do primeiro ficará 3 vêzes maior que o do segundo. Quantos litros contém cada um? *Resp.:* 170 *l* e 70 *l*.
48. Um casal saiu com a quantia de Cr$ 700,00. O marido gastou Cr$ 92,50 e ficou com a metade da quantia da espôsa. Quanto tinha cada um ao sair de casa? *Resp.:* Cr$ 295,00 e Cr$ 405,00.
49. Uma papelaria recebeu 780 cadernos com a condição de ser dado um de graça em cada dúzia e ao preço de Cr$ 96,00 por dúzia. Pagou Cr$ 100,00 de transporte e quer lucrar Cr$ 1 940,00. Por quanto deve vender cada caderno? *Resp.:* Cr$ 10,00.
50. Em 3 caixas há, ao todo, 190 botões. Se passarmos 20 botões da 1.ª caixa para a 2.ª, esta ficará com 60 botões mais que a 1.ª. Mas, se passarmos 5 botões da 2.ª para a 3.ª, esta ficará com 40 botões mais que a 2.ª. Quantos botões há em cada caixa? *Resp.:* 40, 60 e 90.

Frações ordinárias. Operações

1. *Noção de fração*

Sueli dividiu uma torta de maçã em **cinco** partes iguais e deu uma parte a seu irmão.

A parte do irmão chama-se **um quinto.** Sueli tem, ainda, quatro partes ou **quatro quintos.**

Quando um todo ou uma unidade é dividida em partes iguais, uma dessas partes ou a reunião de várias formam uma **fração** do todo.

Para representar uma fração são, portanto, necessários *dois* números inteiros:

a) o primeiro, para indicar em quantas *partes iguais* foi dividida a unidade e que *dá nome* a cada parte e, por essa razão, chama-se **denominador.**

b) o segundo que indica o *número de partes* que foram reunidas e por isso se chama **numerador.**

O numerador e o denominador chamam-se **têrmos** da fração.

A fração do retângulo que está colorida na fig. 25,

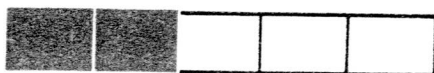



Fig. 25

indica-se:

$$\frac{2}{5} \text{ ou } 2/5$$

O numerador escreve-se acima ou à esquerda do *traço de fração*.

2. *Frações decimais e ordinárias*

As frações, cujos denominadores são potências de 10 denominam-se **decimais.** Exemplos:

$$\frac{3}{10} \qquad \frac{27}{100}$$

As demais frações são denominadas **ordinárias.**

3. *Modo de ler uma fração*

Enuncia-se o numerador e, em seguida, o denominador seguido da palavra *avos*. As frações $\frac{5}{11}$ e $\frac{7}{19}$ lêem-se *cinco onze avos e sete dezenove avos.*

Excetuam-se as frações com denominadores de 2 a 9 que, em lugar de 2 avos etc., se enunciam *meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos, nonos* e as frações decimais nas quais lê-se o numerador seguido das palavras *décimos, centésimos, milésimos* etc.

4. *Emprêgo das frações*

A ——— B

C ——— D

Primeiro emprêgo: **medida de uma grandeza**

AB é um segmento dado, que tomamos como unidade(fig. 26).

Se quisermos medir o segmento *CD*, com a unidade *AB*, teremos de dividir *AB* em unidades menores ou *sub-unidades*. Na figura, dividimos *AB* em 3 partes. A sub-unidade é 1/3. O segmento *CD* contém 2 partes, então:

$$CD = \frac{2}{3} \text{ de } AB.$$

- A fração 2/3 é a **medida** de CD, com a unidade AB.

Se quisermos, do mesmo modo, medir o segmento *EF*, observemos que o mesmo contém 8 sub-unidades; assim:

Fig. 27

$$EF = \frac{8}{3} \text{ de } AB.$$

- A fração 8/3 é a **medida de** EF, com a unidade AB.

Um número como $\frac{8}{3}$ chama-se **fração imprópria,** por ser maior que a unidade.

Observemos que o segmento EF contém 2 unidades inteiras e, ainda, 2/3 de unidade. Sua medida é, também representada pelo número

$$2\,\frac{2}{3}$$

que se chama **número misto,** por ter uma parte inteira e uma fracionária.

- ***Fração própria*** *é a que tem o numerador* ***menor*** *que o denominador.*
- ***Fração imprópria*** *é a que tem o numerador* ***igual*** *ou* ***maior*** *que o denominador.* Exemplos:

$\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$ são *frações próprias*

$\frac{4}{3}, \frac{7}{2}, \frac{5}{5}$ são *frações impróprias*

SEGUNDO EMPRÊGO: **Fração como quociente de uma divisão.**

Se tivermos de dividir duas maçãs entre três meninos, efetuaremos uma divisão em que o dividendo é 2 (duas maçãs) e o divisor 3 (três meninos).

Ora, para dividirmos a primeira maçã, temos de partí-la em três partes iguais, para darmos uma parte ou um têrço a cada menino.

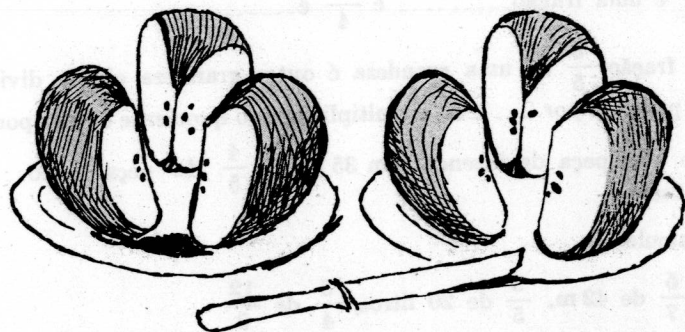



FIG. 28

Em seguida daremos a cada menino uma nova parte da segunda maçã, e cada menino receberá *dois terços*, ou

$$\frac{2}{3} \text{ da maçã.}$$

Por isso, a fração lê-se, também, 2 *dividido* por 3 e a divisão indica-se por intermédio do traço de fração.

5. *Frações particulares*

Para formar uma fração de uma grandeza, dividimos a grandeza pelo *denominador* (número de partes iguais) e multiplicamos o resultado pelo *numerador* (número de partes tomadas). Assim podemos concluir:

1.º) Se o **numerador é zero** a fração é igual a zero:

$$\frac{0}{2} = 0; \quad \frac{0}{7} = 0 \text{ etc.}$$

2.º) Se o **denominador é um** a fração é igual ao numerador:

$$\frac{3}{1} = 3, \quad \frac{7}{1} = 7.$$

3.º) Se o **denominador é zero,** a fração não tem sentido (a divisão por zero é impossível).

4.º) Se o **numerador e o denominador são iguais** a fração é igual à unidade:

$$\frac{5}{5} = 1; \quad \frac{7}{7} = 1.$$

6. *Números mistos e frações impróprias*

Na figura 29 vemos 3 tortas inteiras e uma parte de outra. Quantos *quartos* há em uma torta inteira?

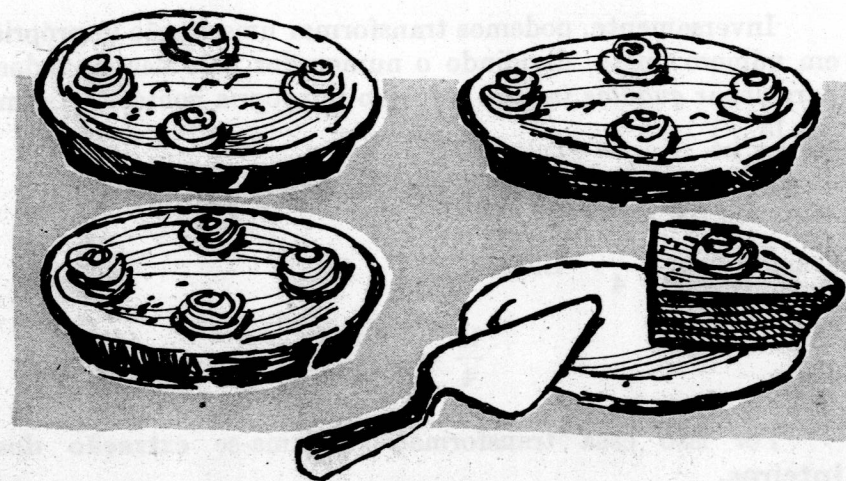



FIG. 29

Se há 4 *quartos* em um inteiro, quantos *quartos* haverá em 3 inteiros?

Para achar, faremos a operação:

$$4 \times 3 = 12$$

Se há 4 × 3 ou 12 quartos em 3 inteiros, quantos quartos haverá em $3\frac{1}{4}$?

Então: $$3\frac{1}{4} = \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4}$$

Veja como um número misto pode ser transformado em fração imprópria:

$$3\frac{1}{4} = \frac{(3 \times 4)+1}{\text{Quartos}} = \frac{12+1}{4} = \frac{13}{4}$$

FIG. 30

Inversamente, podemos transformar uma fração imprópria em número misto, dividindo o numerador pelo denominador, para achar *quantos inteiros* a fração imprópria contém. Assim, em $\frac{13}{4}$ há

$$13 : 4 = 3 \text{ inteiros}$$

e ainda sobra $\frac{1}{4}$, Então:

$$\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Por isso essa transformação chama-se **extração dos inteiros.**

7. *Aplicações*

1. O número escrito acima do traço de fração chama-se..........
2. O número escrito abaixo do traço de fração chama-se..........
3. Os 2 números que figuram na fração chamam-se..........da fração.
4. Um número que tem uma parte inteira e uma fracionária chama-se..............
5. $\frac{3}{8}$ é uma fração.......... e $\frac{15}{4}$ é..........
6. A fração $\frac{3}{5}$ de uma grandeza é outra grandeza obtida dividindo a primeira por..........e multiplicando o quociente obtido por.......
7. Se uma peça de fazenda tem 35 m, os $\frac{4}{5}$ da peça terão.......... metros.
8. Calcule:

   $\frac{5}{7}$ de 42 m, $\frac{3}{5}$ de 20 litros, $\frac{3}{4}$ de $\frac{12}{9}$

9. Se $\frac{1}{3}$ de um número vale 7, o número é..............
10. Se $\frac{3}{5}$ de um número valem 12 unidades, o número é..........
11. A reguinha da figura ao lado está graduada em polegadas (medida americana). Leia o comprimento da fita com um número misto e com uma fração imprópria.

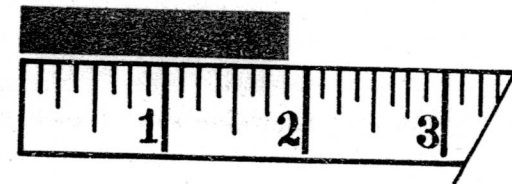



FIG. 31

12. O número 4 vale..........quintos.
13. Escreva os numeradores em branco:

    $8 = \frac{\quad}{7}$, $5 = \frac{\quad}{8}$, $11 = \frac{\quad}{11}$.

14. Transforme em fração os números mistos:

$$3\frac{3}{28}, \quad 1\frac{8}{57}, \quad 32\frac{2}{11}.$$

15. A fração imprópria $\frac{11}{5}$ contém.......... inteiros.

16. Transforme em números mistos.

$$\frac{19}{4}, \frac{341}{50}, \frac{251}{23}.$$

8. *Frações equivalentes*

Observe o retângulo *A*, das figuras 32.

Na primeira figura a parte colorida do retângulo *A* é a fração 2/3, pois o retângulo foi dividido em *três* partes.

Na segunda, o retângulo *A* foi dividido em *seis* partes. A fração colorida é 4/6.

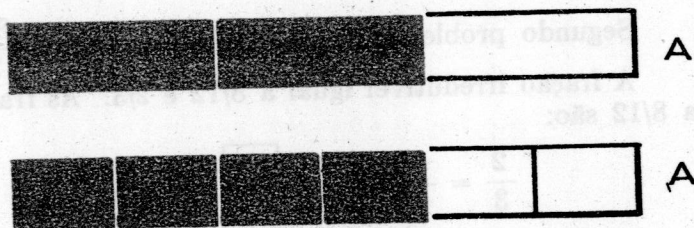



Fig. 32

As partes coloridas são iguais. Assim:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

As frações têm o mesmo valor, por isso dizem-se EQUIVALENTES. Também se dizem *frações iguais.*

Como passamos dos têrmos 2 e 3, aos têrmos 4 e 6?

Multiplicando ambos pelo *mesmo número* (2).

Também podíamos passar da fração 4/6 para 2/3, *dividindo* os dois têrmos por 2.

Propriedade.

Multiplicando ou dividindo os dois têrmos de uma fração pelo mesmo número, obtém-se uma fração igual à primeira.

A divisão só é possível quando os dois têrmos têm um **divisor comum.** Exemplos:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \qquad \frac{15}{9} = \frac{15 : 3}{9 : 3} = \frac{5}{3}.$$

9. *Simplificação das frações. Fração irredutível*

De acôrdo com a propriedade, dividindo os dois têrmos de uma fração pelo mesmo número obtemos uma fração igual à dada. Assim, sendo os dois têrmos da fração $\frac{12}{18}$ divisíveis por 2, 3 e 6, temos:

$$\frac{12}{18} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{12}{18} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

● ***Simplificar uma fração é obter uma fração igual à primeira e de têrmos menores.***

A simplificação só é possível quando os dois têrmos admitem um divisor comum. No terceiro caso obtivemos a

simplificação máxima, pois dividimos os dois têrmos pelo máximo divisor comum, 6. Diz-se, então, que a fração foi **reduzida à expressão mais simples.**

Quando os dois têrmos de uma fração são primos entre si, a mesma não admite simplificação e denomina-se **fração irredutível.** As frações $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{7}$ são irredutíveis.

Exemplos:

1.º) *Reduzir à expressão mais simples* $\frac{72}{240}$.

Os caracteres de divisibilidade facilitam achar os divisores comuns 2 e 3:

$$\frac{72}{240} = \frac{36}{120} = \frac{18}{60} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

2.º) *Reduzir à expressão mais simples* $\frac{182}{273}$.

Os divisores comuns não são fáceis de determinar por intermédio dos caracteres de divisibilidade. Pesquisamos, então, o m.d.c. dos dois têrmos:

$$\text{m.d.c. } (182,\ 273) = 91$$

Assim:

$$\frac{182}{273} = \frac{182 : 91}{273 : 91} = \frac{2}{3}.$$

A fração irredutível equivalente é 2/3.

Observação: Quando um ou ambos os têrmos são produtos não se deve efetuá-los antes de ter esgotado tôdas as possibilidades de simplificação, pois é mais fácil achar os divisores dos fatôres que os do produto.

Exemplo. Simplificar $\frac{7 \times 36 \times 15}{42 \times 5 \times 60}$.

Os fatôres 7 e 42 são divisíveis por 7. Os fatôres 36 e 60 são por 12 e os fatôres 15 e 5 por 5. Assim:

$$\frac{7 \times 36 \times 15}{42 \times 5 \times 60} = \frac{1 \times 3 \times 3}{6 \times 1 \times 5} = \frac{1 \times 1 \times 3}{2 \times 1 \times 5} = \frac{3}{10}$$

10. *Achar frações iguais a uma fração dada*

Primeiro problema: *Achar as frações iguais a 3/7.*

A fração 3/7 é irredutível. Multiplicando os dois têrmos por um mesmo número, podemos formar o quadro de frações iguais:

Multiplicador	1	2	3	4	...
Fração	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{12}{28}$	...

Êste quadro pode ser prolongado até onde quisermos.

Para obter frações iguais a uma fração irredutível dada, multiplicam-se os dois têrmos por um multiplicador inteiro, diferente de zero.

Segundo problema: *Achar frações iguais a* $\frac{8}{12}$.

A fração irredutível igual a 8/12 é 2/3. As frações iguais a 8/12 são:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{8}{12}} = \frac{10}{15} = \ldots$$

Exemplos:

1.º) *Achar a fração equivalente a* $\frac{12}{16}$, *de denominador 28.*

A fração irredutível equivalente é 3/4. Resta achar, dentre as frações iguais a 3/4, a que tem denominador 28. Para isto basta achar o multiplicador que multiplicado por 4 dá 28, que é:

$$28 : 4 = 7$$

A fração procurada é: $\frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28}$

2.º) *Achar a fração equivalente a $\frac{15}{21}$, cuja soma dos têrmos seja 108.*

Tôdas as frações equivalentes a $\frac{15}{21}$ são iguais *à fração irredutível* 5/7, cuja soma dos têrmos é 12.

Para a soma tornar-se 108, o multiplicador será:

$$108 : 12 = 9$$

A fração procurada é:

$$\frac{5 \times 9}{7 \times 9} = \frac{45}{63}.$$

11. *Redução de frações ao mesmo denominador*

Há necessidade, para efetuar certas operações com frações dadas, de achar frações que lhe sejam iguais e tenham o mesmo denominador.

Esta transformação chama-se **redução ao mesmo denominador,** e o denominador das frações encontradas chama-se **denominador comum.**

Para achar as frações iguais devemos multiplicar os dois têrmos pelo mesmo número, como sabemos; logo, o denominador comum deve ser um múltiplo de cada um dos denominadores das frações dadas. De preferência, o menor múltiplo comum. Daí chamar-se o **mínimo denominador comum.**

Exemplo:

Reduzir ao mesmo denominador as frações $\frac{6}{16}$, $\frac{21}{36}$ e $\frac{5}{6}$.

Com o fim de obter simplicidade de cálculo, reduzí-mo-las à expressão mais simples e obtemos as equivalentes:

$$\frac{3}{8}, \frac{7}{12} \text{ e } \frac{5}{6}.$$

O *mínimo denominador comum* será:

$$\text{m.m.c. } (8, 12, 6) = 24$$

Temos, então:

$$24 = 8 \times 3$$
$$24 = 12 \times 2$$
$$24 = 6 \times 4$$

e verifica-se que é preciso multiplicar:

— os dois têrmos de 1.ª fração por 3
— os dois têrmos da 2.ª fração por 2
— os dois têrmos da 3.ª fração por 4

e obteremos as frações com o mesmo denominador:

$$\frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{9}{24}; \quad \frac{7 \times 2}{12 \times 2} = \frac{14}{24}; \quad \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}.$$

Constata-se a *regra:*

1.ª) Reduzem-se as frações à expressão mais simples;
2.ª) acha-se o m.m.c. dos denominadores;
3.ª) calcula-se o quociente do m.m.c. por cada um dos denominadores;
4.ª) multiplicam-se os dois têrmos de cada fração pelo quociente correspondente.

12. *Comparação de frações*

1.º) **Frações com o mesmo denominador.** O retângulo da figura 33 está sempre dividido em 6 partes.

Observe pelas partes coloridas que:

$$\frac{5}{6} > \frac{3}{6} > \frac{1}{6}.$$

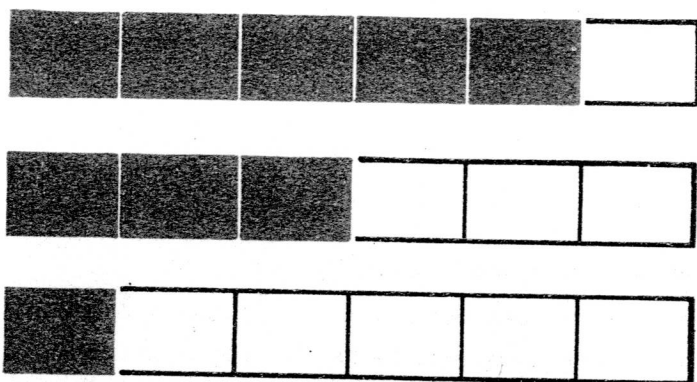



Fig. 33

De duas frações, que têm o mesmo denominador, a maior é a que tiver maior numerador.

2.º) **Frações com o mesmo numerador.** Nas figuras 34 o mesmo retângulo foi dividido primeiro em 5 partes, depois em 4 e, finalmente, em 3.

Foram sempre coloridas *duas partes.* Observe que:

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{4} < \frac{2}{3}$$

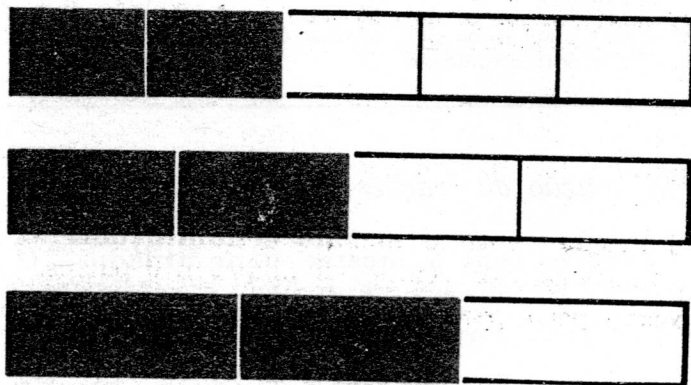



Fig. 34

De duas frações, que têm o mesmo numerador, a maior é a que tiver menor denominador.

3.º) **Frações com numeradores e denominadores diferentes.** Neste caso, reduzimos antes as frações ao mesmo denominador. Exemplo.

Comparar 2/5 com 3/7.

Temos, com o mesmo denominador:

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35} \quad \text{e} \quad \frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

E concluímos, *como no primeiro caso:*

$$\frac{3}{7} > \frac{2}{5}.$$

Observações:

1.ª) Da mesma forma que se reduzem frações ao mesmo denominador podemos reduzí-las ao mesmo numerador, o que em certos casos é útil para compará-las.

Exemplo: Comparar

$$\frac{2}{375} \text{ com } \frac{3}{453}$$

A redução ao mesmo numerador é, neste exemplo, bem mais cômoda que a do denominador. Obtém-se:

$$\frac{2}{375} = \frac{6}{1\,125}$$

$$\frac{3}{453} = \frac{6}{906}$$

A segunda tem menor denominador, logo é a maior. Conclui-se:

$$\frac{3}{453} > \frac{2}{375}$$

2.ª) Em certos casos, pode-se comparar frações à simples vista. Por exemplo quando uma é própria e outra imprópria. A imprópria é maior. Quando uma das frações é maior que 1/2 e a outra menor. Como, por exemplo, 3/4 e 5/13. A primeira é maior que 1/2 e a segunda menor; logo temos:

$$\frac{3}{4} > \frac{5}{13}$$

13. *Aplicações*

1. *Escreva em oitavos:* $\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{12}{16}, \frac{24}{32}$.

2. *Escreva os têrmos em branco, de modo que se verifiquem as igualdades:*

$$\frac{2}{3} = \frac{\ }{15},\ \frac{16}{48} = \frac{8}{\ },\ \frac{1}{5} = \frac{\ }{20},\ \frac{78}{104} = \frac{3}{\ }.$$

3. *Reduza à expressão mais simples as frações:*

$$\frac{18}{42},\ \frac{108}{144},\ \frac{165}{231},\ \frac{14 \times 5}{15 \times 7}$$

4. *Envolva em um círculo as frações irredutíveis:*

$$\frac{3}{4},\ \frac{6}{8},\ \frac{5}{7},\ \frac{12}{20},\ \frac{35}{42},\ \frac{11}{13}$$

● Complete as lacunas:

5. As frações iguais a 16/28, com denominador menor que 20 são......

6. A fração equivalente a $\frac{25}{30}$, cujo numerador é 75, é......

7. A fração equivalente a $\frac{75}{90}$, cujo denominador é 12, é......

8. A fração equivalente a 2/3, cuja soma dos têrmos é 80, é......

9. A fração equivalente a 3/8, cuja diferença dos têrmos é 25, é......

10. A fração equivalente a 18/24, cuja soma dos têrmos é 49, é......

11. A fração equivalente a 12/18, cuja diferença dos têrmos é 10, é......

● Reduza ao mínimo denominador comum:

12. $\frac{5}{9}, \frac{7}{18}$ e $\frac{11}{36}$ 13. $\frac{16}{24}, \frac{36}{45}$ e $\frac{7}{15}$ 14. $\frac{5}{8}, \frac{6}{24}$ e $\frac{14}{35}$

● Reduza ao mínimo numerador comum:

15. 3/8, 18/24 e 12/15.

16. Achar as duas frações mais simples, respectivamente equivalentes a 3/5 e 7/8, e tais que o numerador da 1.ª seja igual ao denominador de 2.ª.

● Escreva em *ordem decrescente* as frações:

17. $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{5}{7}$ 18. $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{4}$

19. $\frac{7}{10}, \frac{9}{7}$ 20. $\frac{3}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}$

21. Seja a fração 3/4. Se somamos $15 = 3 \times 5$ ao numerador e $20 = 4 \times 5$ ao denominador, obtemos uma fração equivalente. Por que?

22. Somei 10 ao denominador da fração 4/5. Para não alterar seu valor quanto devo somar ao numerador?

Respostas:

1. 2/8, 12/8, 6/8, 6/8
2. 10, 24, 4,4
3. 3/7, 3/4, 5/7, 2/3
4. 3/4, 5/7, 11/13
5. 4/7, 8/14
6. 75/90
7. 10/12
8. 32/48
9. 15/40
10. 21/28
11. 20/30
12. 20/36, 14/36 e 11/36
13. 10/15, 12/15 e 7/15
14. 25/40, 10/40 e 16/40
15. 12/32, 12/16 e 12/15
16. 24/40 e 21/24
17. 6/7 > 5/7 > 3/7 > 2/7
18. 2/3 > 2/4 > 2/5
19. 9/7 > 7/10
20. 2/3 > 1/2 > 3/8
21. É o mesmo que multiplicar ambos os têrmos por 6.
22. 8

OPERAÇÕES

14. *Adição*

Na adição de frações há três casos a considerar.

Primeiro caso. **Adição de frações que têm o mesmo denominador.** Seja a adição

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7}$$

As parcelas contêm, respectivamente, 1, 3 e 2 unidades fracionárias; logo, a soma conterá $1 + 3 + 2$ ou 6 unidades fracionárias da mesma espécie:

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

● ***Adicionam-se os numeradores e dá-se ao resultado o denominador comum.***

SEGUNDO CASO. **Adição de frações com denominadores diferentes.** Seja a adição

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$$

Reduzindo as frações dadas ao mesmo denominador, obtemos:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12}$$

e aplicando a *regra do primeiro caso:*

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{8+9+10}{12} = \frac{27}{12} = 2\frac{3}{4}$$

TERCEIRO CASO. **Adição de inteiros e frações ou números mistos.** O mais cômodo é somar primeiro as partes fracionárias, e, em seguida, os inteiros. A soma das frações pode ser uma fração imprópria da qual devem ser extraídos os inteiros, como mostram os exemplos seguintes:

$$\begin{array}{r} 3\frac{1}{4} \\ +2\frac{1}{2} \end{array} = \begin{array}{r} 3\frac{1}{4} \\ +2\frac{2}{4} \\ \hline 5\frac{3}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\frac{5}{8} \\ +5\frac{1}{2} \end{array} = \begin{array}{r} 6\frac{5}{8} \\ +5\frac{4}{8} \\ \hline 11\frac{9}{8} \end{array}$$

$$11\frac{9}{8} = 11 + 1\frac{1}{8} = 12\frac{1}{8}$$

FIG. 35

15. *Subtração*

PRIMEIRO CASO. **Frações com o mesmo denominador.** Seja

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7}$$

A primeira fração contém 5 partes e a segunda 2; as partes são iguais, logo, a diferença conterá $5 - 2$ dessas mesmas partes. Assim:

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7}$$

● ***Subtraem-se os numeradores e dá-se ao resultado o denominador comum.***

SEGUNDO CASO. **Frações com denominadores diferentes.** Seja subtrair

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{5}{8}$$

Reduzindo as frações ao mesmo denominador, a operação será realizada como no primeiro caso. Assim:

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{5} = \frac{25-16}{40} = \frac{9}{40}$$

TERCEIRO CASO. **Subtração de inteiros e frações ou números mistos.** Exemplos:

1.º) $$4 - \frac{3}{5}$$

De uma das 4 unidades tiro 3/5 e ficam, ainda, 2/5. Logo o resultado é $3\frac{2}{5}$:

$$4 - \frac{3}{5} = 3 + \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 3\frac{2}{5}$$

Do mesmo modo:

$$3 - \frac{2}{3} = 2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2\frac{1}{3}$$

2.º) $\frac{8}{3} - 2$

Extraindo os inteiros do minuendo:

$$\frac{8}{3} - 2 = 2\frac{2}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

Do mesmo modo:

$$\frac{19}{4} - 3 = 4\frac{3}{4} - 3 = 1\frac{3}{4}$$

3.º) *Números mistos.* Quando a fração do minuendo é maior que a do subtraendo, não há dificuldade na subtração como se vê no exemplo abaixo, onde foram subtraídos os inteiros e as frações separadamente.

$$\begin{array}{r} 4\frac{7}{8} \\ -2\frac{1}{4} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 4\frac{7}{8} \\ -2\frac{2}{8} \\ \hline 2\frac{5}{8} \end{array}$$

Fig. 36

Quando a fração do minuendo fôr menor que a do subtraendo, transformaremos uma unidade em fração, como se vê no exemplo:

$$\begin{array}{r} 8\frac{1}{2} \\ -3\frac{5}{8} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 7+1\frac{4}{8} \\ -3\frac{5}{8} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 7\frac{12}{8} \\ -3\frac{5}{8} \\ \hline 4\frac{7}{8} \end{array}$$

Fig. 37

Observação. As operações com números mistos podem também ser feitas transformando-os em frações:

$$8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8} = \frac{17}{2} - \frac{29}{8} = \frac{68 - 29}{8} = \frac{39}{8} = 4\frac{7}{8}.$$

16. *Aplicações*

● Efetue as operações:

1. $\frac{2}{11} + \frac{5}{11} - \frac{3}{11} + \frac{1}{11}$
2. $\frac{13}{15} + \frac{7}{12} + \frac{2}{5}$
3. $\frac{25}{32} - \frac{7}{12}$
4. $3 - \frac{4}{5}$
5. $\frac{11}{3} - 2$
6. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$
7. $5\frac{1}{4} + 3\frac{1}{3}$
8. $15\frac{7}{8} - 5\frac{3}{4}$
9. $3\frac{2}{3} + 1\frac{5}{8}$
10. $4\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3}$

Respostas:

1. 5/11 2. $1\frac{17}{20}$ 3. 19/96 4. 2 1/5 5. 1 2/3 6. 7/12 7. $8\frac{7}{12}$ 8. $10\frac{1}{8}$ 9. $5\frac{7}{24}$ 10. $1\frac{5}{6}$

17. *Multiplicação*

Primeiro caso. **Multiplicação de uma fração por um inteiro.**

Suely dedica 3/4 de hora por dia a seus deveres de matemática, durante a semana, de segunda a sexta-feira. Quantas horas estuda por semana?

FIG. 38

Para calcular o total em 5 dias, podemos multiplicar:

$$\frac{3}{4}\,h \times 5$$

Suely calcula:

2.ª f.ª		3.ª f.ª		4.ª f.ª		5.ª f.ª		6.ª f.ª	
$\frac{3}{4}$	+	$\frac{3}{4}$	+	$\frac{3}{4}$	+	$\frac{3}{4}$	+	$\frac{3}{4}$	$= \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}\,h.$

Então, como tem de somar 5 parcelas iguais a 3, Suely pode multiplicar 3 por 5:

$$\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

FIG. 39

SEGUNDO CASO. **Multiplicação de inteiro por fração.**

Quanto se deve pagar por 2/3 do metro de uma fazenda que custa 120 cruzeiros por metro?

A quantia a pagar obter-se-á multiplicando o preço do metro pela quantidade comprada:

$$120 \times \frac{2}{3}$$

Ora, se o metro custa 120 cruzeiros, um têrço custará:

$$\frac{120}{3}$$

E os dois têrços custarão:

$$\frac{120}{3} + \frac{120}{3} = \frac{240}{3} = 80.$$

Como temos de somar duas parcelas iguais a 120, podemos multiplicar:

$$120 \times \frac{2}{3} = \frac{120 \times 2}{3} = \frac{240}{3} = 80$$

Resp.: Custou Cr$ 80,00

FIG. 40

Exemplos:

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}; \qquad 4 \times \frac{5}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}.$$

$$\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}; \qquad \frac{3}{8} \times 3 = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}.$$

É importante guardar a regra para os dois casos:

● ***Multiplica-se o inteiro pelo numerador e conserva-se o denominador.***

TERCEIRO CASO. **Multiplicação de duas frações.** Veja, na figura abaixo, que o retângulo contém:

$$7 \times 4 = 28 \text{ quadrados.}$$

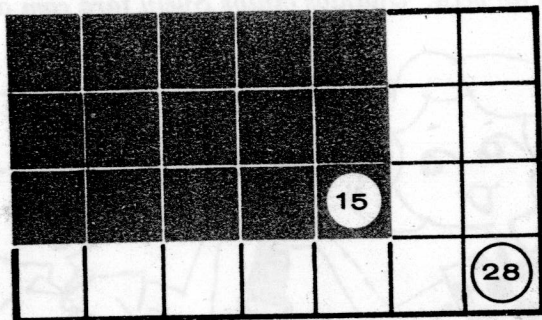



FIG. 41

Se tomarmos 5 partes do comprimento e 3 partes da largura, o novo retângulo conterá:

$$3 \times 5 = 15$$

Assim, tomando 5/7 do comprimento e 3/4 da largura, o novo retângulo conterá 15 dos 28 quadrados; isto é:

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{15}{28}$$

● ***Para multiplicar frações, multiplicam-se os numeradores entre si e, do mesmo modo, os denominadores.***

Exemplos:

1.º) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$.

2.º) $\frac{7}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{10 \times 5} = \frac{21}{50}$.

OBSERVAÇÕES:

1.ª) **Números mistos.** Para multiplicar números mistos, transformam-se, antes, em frações impróprias:

$$8\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{17} = \frac{17}{2} \times \frac{18}{17} = 9.$$

2.ª) **Cancelamento.** Antes de efetuar a multiplicação é conveniente simplificar os fatôres comuns aos dois têrmos do produto.

Seja a multiplicação $\frac{7}{4} \times \frac{6}{5}$. O denominador 4 e o numerador 6 têm o fator comum 2; logo, o resultado admitirá a simplificação do fator 2, que pode ser efetuada prèviamente.

$$\frac{7}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{7}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$$

18. *Aplicações*

● Efetue as operações:

1. $16 \times \frac{7}{20}$
2. $\frac{11}{21} \times 7$
3. $\frac{36}{35} \times \frac{7}{24}$
4. $18 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$
5. $5 \times 2\frac{3}{7}$
6. $5 \times 2 + \frac{3}{7}$
7. $2\frac{1}{3} \times 5\frac{5}{6}$
8. $\left(2\frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3}\right) 5$
9. $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \times \frac{7}{26}$
10. Explique como se chega à regra da multiplicação de fração por inteiro com o exemplo $\frac{3}{5} \times 4$.
11. Um parafuso penetra 2 mm em 5 voltas. Que fração do milímetro penetra em 1 volta? E em 8 voltas?

RESPOSTAS:

1. $5\frac{3}{5}$ 2. $3\frac{2}{3}$ 3. $\frac{3}{10}$ 4. 9 5. $12\frac{1}{7}$ 6. $10\frac{3}{7}$ 7. $13\frac{11}{18}$ 8. 10 9. $\frac{7}{30}$ 11. $\frac{2}{5}$ e $3\frac{1}{5}$.

19. *Números inversos ou recíprocos*

O retângulo A das figuras 42 está dividido em 4 partes e B contém 3 dessas partes, então:

$$B = \frac{3}{4} \text{ de } A.$$

B está dividido em 3 partes e A contém 4 dessas partes; então:

$$A = \frac{4}{3} \text{ de } B.$$

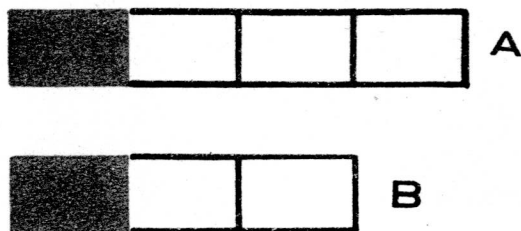



FIG. 42

Duas frações como $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$, chamam-se **inversas** ou **recíprocas**. O numerador da primeira é denominador da segunda e o denominador da primeira é numerador da segunda.

● *O produto de dois números inversos é 1:* $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1.$

Exemplos:

O inverso de $\frac{3}{5}$ é $\frac{5}{3}$.

O inverso de $\frac{1}{3}$ é $\frac{3}{1}$ ou 3

O inverso de 5 ou $\frac{5}{1}$ é $\frac{1}{5}$.

20. *Divisão de frações*

Suely recebeu 6 peças de couro a fim de fazer cinturões para o grupo de escoteiros de seu irmão. Para cada cinto são utilizados 2/3 de peça. Quantos cintos Suely fará com as 6 peças?

FIG. 43

Êste é um problema de divisão. O dividendo é 6 e o divisor 2/3:

$$6 \div \frac{2}{3}$$

FIG. 44

Veja o diagrama abaixo.

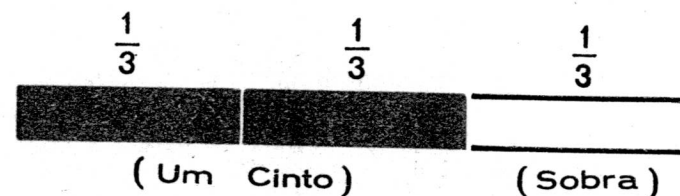
$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

(Um Cinto) (Sobra)

FIG. 45

Com dois têrços da peça faz um cinto e sobra *um têrço* que dará para meio cinto, como se vê na figura 45.

Assim, cada peça dá um *cinto e meio* ou $1\frac{1}{2}$.

As seis peças darão:

$$6 \times 1\frac{1}{2} = 6 \times \frac{3}{2} = 9 \text{ cintos.}$$

Veja como resolvemos o problema de divisão por uma fração:

$$6 \div \frac{2}{3} = 6 \times \frac{3}{2} = 9$$

FIG. 46

● ***Para efetuar a divisão,*** *usamos a multiplicação.*

Que acontece ao divisor, quando usamos a multiplicação?

A regra da divisão por uma fração geralmente se enuncia:

● ***Multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor.***

Exemplos:

1.º) $3 : \frac{5}{3} = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$

2.º) $\frac{2}{3} : \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$

3.º) $\frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$

21. *Números mistos*

Quando na divisão figuram números mistos, êstes devem ser transformados em fração. Exemplos:

1.º) $2\frac{7}{8} : 2 = \frac{23}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{23}{16} = 1\frac{7}{16}$

2.º) $3\frac{1}{3} : 5\frac{1}{4} = \frac{10}{3} : \frac{21}{4} = \frac{10}{3} \times \frac{4}{21} = \frac{40}{63}$

3.º) $5 : 2\frac{1}{3} = 5 : \frac{7}{3} = 5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$

22. *Potenciação*

Seja calcular o cubo de 3/5.
Por definição de potência, temos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5}$$

ou

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

Conclui-se:

● ***Para elevar uma fração a uma potência, eleva-se cada um dos têrmos a essa potência.***

23. *Frações positivas e negativas*

A fração é positiva quando os dois têrmos têm o mesmo sinal. Exemplos:

$$\frac{+3}{+5} = +\frac{3}{5}; \qquad \frac{-3}{-5} = +\frac{3}{5}$$

A fração é negativa quando os têrmos têm sinais contrários. Exemplos:

$$\frac{-3}{+5} = -\frac{3}{5}; \qquad \frac{+3}{-5} = -\frac{3}{5}.$$

24. *Aplicações*

● Efetue as operações:

1. $\frac{3}{4} : 2$
2. $\frac{15}{16} : 5$
3. $8 : \frac{2}{3}$.
4. $9 : \frac{5}{8}$
5. $\frac{7}{30} : \frac{7}{96}$
6. $\frac{3}{13} : \frac{75}{91}$
7. $4 : \frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$
8. $\frac{58}{33} : \frac{29}{11} : \frac{2}{3}$
9. $\frac{58}{33} : \left(\frac{29}{11} : \frac{2}{3}\right)$
10. $15 : \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$
11. $15 : \frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$
12. $2\frac{7}{8} : 2$
13. $2\frac{1}{4} : 1\frac{1}{8}$
14. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
15. $\left(3\frac{1}{3} - 2\frac{2}{5}\right) : 1\frac{1}{6}$
16. $\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(+\frac{5}{8}\right)$
17. $\left(+3\frac{2}{5}\right) + \left(-4\frac{2}{5}\right)$
18. $\left(-3\frac{1}{3}\right) - \left(+2\frac{5}{9}\right)$
19. $\left(+\frac{10}{3}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right)$
20. $\left(+\frac{253}{35}\right) : \left(-3\frac{2}{7}\right)$

● **Complete as lacunas:**

21. **Se subtrairmos de 7/4 o seu inverso, a diferença é............**
22. **Multiplicar um número por 1/5 equivale a dividí-lo por............**
23. **Dividir um número por 3/5 equivale a multiplicá-lo por............**
24. **Dividindo um número por 3/5 êle aumenta de seus............**
25. **Descubra a regra "multiplica-se pelo inverso", utilizando a divisão $6 : \frac{1}{2}$. (Veja primeiro quantas vêzes $\frac{1}{2}$ está contido em uma unidade, depois em 6).**

RESPOSTAS:

1. 3/8	6. $\frac{7}{25}$	11. 30	16. 1/40	21. $1\frac{5}{28}$
2. 3/16	7. $3\frac{1}{3}$	12. $1\frac{7}{16}$	17. − 1	22. 5
3. 12	8. 1	13. 2	18. $-5\frac{8}{9}$	23. 5/3
4. $14\frac{2}{5}$	9. $\frac{4}{9}$	14. $\frac{8}{27}$	19. − 5	24. 2/3
5. $3\frac{1}{5}$	10. $16\frac{7}{8}$	15. 4/5	20. $-2\frac{1}{5}$	

25. *Problemas envolvendo frações*

I. Os dois problemas fundamentais

1.º) *Um saco de açúcar pesa 60kg. Quanto pesarão quatro quintos do saco?*

Resolução. Determinamos, em primeiro lugar, o pêso de 1/5 do saco, que será:

$$60 : 5 = 12.$$

Se 1/5 do saco pesa 12kg, os 4/5 pesarão quatro vêzes mais, isto é:

$$12 \times 4 = 48.$$

Assim, 4/5 do saco pesam 48kg.

Neste tipo de problema, procura-se o **valor** da **fração** de uma **grandeza dada.**

(Resolva os problemas de 1 a 3)

2.º) *Carlos gastou 3/25 de seu ordenado comprando um terno de roupa de Cr$ 1 800,00. Qual o ordenado de Carlos?*

Resolução. Se 3/25 correspondem a Cr$ 1 800,00,
1/25 corresponderá a: 1 800 : 3 = 600
e os 25/25, ou o ordenado:

$$600 \times 25 = 15\,000.$$

Assim, o ordenado é de Cr$ 15 000,00.

Neste tipo de problema, procura-se o **valor da grandeza** quando é **dada uma fração** dessa grandeza.

(Resolva os problemas de 4 a 8).

NOTA: É importante familiarizar-se com os dois tipos fundamentais, resolvendo os exercícios de 1 a 8 da página 180.

II. Problemas com frações de uma só grandeza

Exemplo: *Um negociante vende 1/3 de uma peça de fazenda e, depois, 2/5 da mesma peça. Restam-lhe, ainda, 36 metros. Quantos metros tinha a peça?*

Resolução. Como as frações são partes de uma mesma grandeza, podemos operar com elas **diretamente,** obtendo como resultados frações da mesma grandeza.

Assim, vendeu ao todo:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} \text{ da peça}$$

Fração restante:

$$\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15} \text{ da peça}$$

Mas, restaram 36 m; logo:

$\frac{4}{15}$ da peça correspondem a *36* metros

$\frac{1}{5}$ corresponderá a: 36 m : 4 = 9 m

e os $\frac{15}{15}$ (comprimento da peça) corresponderão:

$$9 \text{ m} \times 15 = 135 \text{ m}$$

Resposta: A peça tinha 135 m.

Os problemas dêsse tipo são ainda muito simples, pois **podemos operar diretamente** com as frações **dadas.**

(Resolva os problemas de 9 a 14)

III. Problemas com frações de mais de uma grandeza

Foram distribuídos 70 bombons entre 3 meninos. O primeiro recebeu 2/3 do que tocou ao segundo e o segundo, 4/5 do que tocou ao terceiro. Quantos bombons recebeu cada um?

DADOS	PEDIDOS
Parte do 1.º = 2/3 da parte do 2.º	Parte do 1.º menino
Parte do 2.º = 4/5 da parte do 3.º	Parte do 2.º menino
Soma das 3 partes = 70 bombons.	Parte do 3.º menino.

RESOLUÇÃO. Temos no enunciado frações de *duas* quantidades:

2/3 da parte do *2.º* e 4/5 da parte do *3.º*

Devemos, então, reduzí-las a fração de *uma só*, tomando como unidade a parte do 2.º ou do 3.º. É mais simples tomar como unidade a 3.ª parte (última dada no enunciado). Teremos:

Parte do 2.º = $\frac{4}{5}$ da parte do 3.º (segundo dado);

Parte do 1.º = $\frac{2}{3}$ do 2.º ou $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ do 3.º = $\frac{8}{15}$ do 3.º.

Assim, tôdas as partes ficam sendo frações da 3.ª e o problema se reduz ao tipo II, pois a 3.ª é 5/5 dela própria.

Soma das 3 partes (total de bombons):

$$\frac{8}{15} + \frac{4}{5} + \frac{5}{5} = \frac{35}{15} \text{ da } 3.^a$$

Mas o total é de 70 bombons. Assim:

$\frac{35}{15}$ da 3.ª → 70 bombons

$\frac{1}{15}$ da 3.ª → 70 : 35 = 2 bombons

$\frac{8}{15}$ (parte do 1.º) → 2 × 8 = 16 bombons

$\frac{12}{15}$ (parte do 2.º) → 2 × 12 = 24 bombons

$\frac{15}{15}$ (parte do 3.º) → 2 × 15 = 30 bombons.

EXERCÍCIOS

Resolva os problemas:

1. Um reservatório cheio contém 24 litros. Quantos litros conterão 4/6 do reservatório? *Resp.:* 16 litros.
2. Um ciclista percorre 16 km por hora. Quantos quilômetros percorrerá em 3/4 de hora? *Resp.:* 12 km
3. Uma pessoa percorre 13/4 de quilômetro por hora. Quantos quilômetros percorrerá em 3/4 de hora? *Resp.:* $2\frac{7}{16}$ do km
4. Qual o número, cujos 3/5 valem 15? *Resp.:* 25.
5. Um automóvel percorre 60 km em 3/4 de hora. Quantos quilômetros percorrerá em 4h? *Resp.:* 320 km

6. Os 4/9 de uma sala foram ladrilhados com 80 ladrilhos. Qual será a despesa para ladrilhar a sala inteira se a colocação de cada dúzia sai a Cr$ 360,00? *Resp.:* Cr$ 5 400,00
7. Para ladrilhar 5/7 de um pátio empregaram-se 46 360 ladrilhos. Quantos ladrilhos iguais serão necessários para ladrilhar 3/8 do mesmo pátio? (I.E.) *Resp.:* 24 339
8. Carlos revendeu um terreno por Cr$ 1 500 000,00, tendo de lucro 2/3 do preço que lhe custara. Por quanto comprara o terreno? *Resp.:* Cr$ 900 000,00
9. Em uma casa comercial, metade dos empregados são homens, um têrço são mulheres e os dez restantes são meninos. Quantos empregados há na casa? *Resp.:* 60
10. A soma de dois números é 120. O menor vale 2/3 do maior. Quais são os números? *Resp.:* 72 e 48
11. A diferença entre dois números é 125. O menor é 1/6 do maior. Quais são os números? *Resp.:* 150 e 25.
12. Dois amigos desejam comprar um terreno. Um dêles tem 1/5 do valor e outro, 1/7. Juntando ao que possuem Cr$ 276 000,00, poderiam comprar o terreno. Qual o preço do terreno? *Resp.:* Cr$ 420 000,00.
13. Uma pessoa gastou 2/5 do que possuía mais Cr$ 3 600,00, ficando com 3/7 daquela quantia. Quanto possuía? *Resp.:* Cr$ 21 000,00.
14. Suely trabalha após as aulas numa loja de fazendas. Uma tarde recebeu uma peça de linho de 45 metros para vender. Nesta mesma tarde vendeu 3/5 da peça, depois 1/3. Quantos metros restaram por vender? *Resp.:* 3 metros.
15. Dividir Cr$ 4 800,00 entre três pessoas, de modo que as partes da primeira e da segunda sejam, respectivamente, 1/3 e 4/5 do que receber a terceira. *Resp.:* Cr$ 750,00; Cr$ 1 800,00 e Cr$ 2 250,00.
16. Uma senhora repartiu Cr$ 273,00 entre seus três filhos. O primeiro recebeu 3/4 do que tocou ao segundo e êste, 2/3 do que tocou ao terceiro. Quanto recebeu cada um? *Resp.:* Cr$ 63,00; Cr$ 84,00 e Cr$ 126,00.
17. Uma pessoa gasta 3/5 de seu ordenado com despesas de casa e 1/4 do resto com despesas pessoais. Economiza mensalmente Cr$ 9 000,00. Qual o ordenado? *Resp.:* Cr$ 30 000,00.
18. Paulo gastou 1/3 da quantia que possuía e, em seguida, 3/5 do resto. Ficou com Cr$ 80,00. Quanto possuía? *Resp.:* Cr$ 300,00.
19. Um negociante vendeu uma peça de fazenda a três fregueses. O primeiro comprou 1/3 da peça e mais 10 metros. O segundo comprou 1/5 da peça e mais 12 metros e o 3.º comprou os 20 metros restantes. Quantos metros tinha a peça? *Resp.:* 90 m.
20. Mário gastou 3/8 do que possuía. Recebeu, depois, Cr$ 950,00 e ficou com o triplo da quantia primitiva. Quanto possuía antes de gastar os 3/8? *Resp.:* Cr$ 400,00.

Frações e números decimais. Operações. Conversões

27. *Fração decimal*

É a fração que tem para denominador uma potência de dez. Exemplos:

$$\frac{7}{10},\ \frac{27}{100},\ \frac{135}{1000}$$

28. *Número decimal*

Podemos escrever as **frações decimais** com a notação de **número decimal,** de acôrdo com o princípio da numeração decimal escrita, segundo o qual um algarismo escrito **à direita de outro representa unidades dez vêzes menores** que as dêsse outro.

Assim, $\frac{7}{10}$ escrever-se-á 0,7

a vírgula decimal marcando a ordem das **unidades simples.** Realmente, o algarismo 7, escrito à direita das unidades simples, representa unidades **dez vêzes menores,** isto é, décimos.

Seja, ainda, a fração decimal $\frac{4235}{100}$.

O numerador pode ser decomposto nas unidades de diversas ordens:

$$\frac{4235}{100} = \frac{4000 + 200 + 30 + 5}{100} = 40 + 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100},$$

ou, 4 dezenas + 2 unidades + 3 décimos + 5 centésimos. Êste número pode ser escrito com as mesmas convenções dos números inteiros, desde que se saiba qual o **algarismo** que corresponde às **unidades simples.** Para isso, coloca-se uma **vírgula** à direita do algarismo das unidades e escreve-se:

42,35

que se chama **número decimal.**

A **vírgula** indica o fim da **parte inteira** e o início da **parte decimal.**

No número 42,35 a parte inteira é 42 e a parte decimal, 35. Em alguns países usa-se o **ponto decimal:** 42.35 (Estados Unidos).

Veja o esquema:

FIG. 47

No esquema, os algarismos indicam também a ordem. Assim:

décimos : 1.ª ORDEM DECIMAL
milésimos : 3.ª ORDEM DECIMAL
centenas : 3.ª ORDEM.

29. *Leitura dos números decimais*

Lê-se o número como se fôsse inteiro e dá-se a denominação da ordem que corresponde ao último algarismo.

Exemplos:

1.º) O número 0,725 lê-se 725 milésimos.
2.º) O número 25,08 lê-se 2 508 centésimos.

O número decimal pode também ser lido enunciando-se primeiro a parte inteira e depois a decimal.

Assim 25,08 lê-se 25 unidades e 8 centésimos.

30. *Redução à mesma denominação*

Dependendo os valores relativos dos algarismos de um número decimal apenas de sua posição em relação à vírgula, conclui-se:

> **O número decimal não muda de valor, se acrescentarmos ou suprimirmos zeros à direita do último algarismo.**

0,3 = 0,30 = 0,300

Para reduzir dois ou mais números decimais à mesma denominação é, pois, suficiente acrescentar zeros à direita de um dêles, de modo que fiquem com o mesmo número de algarismos decimais.

Os números 0,5 e 0,75 reduzidos à mesma denominação serão

0,50 e 0,75

31. *Comparação de números decimais*

Basta comparar, a partir da esquerda, os algarismos que representam unidades de mesma ordem. Exemplos:

5,4 > 3,9 porque 5 > 3

3,481 > 3,479 porque 8 > 7

32. *Aplicações*

● Escreva com a forma de número decimal:

1. $\frac{235}{100}$, $\frac{3251}{1000}$ e $\frac{45}{100}$

2. Escreva com a forma de fração decimal: 3,51 ; 0,041; 25,08.

3. Qual a ordem dos décimos-milésimos? E dos centésimos?

4. Ordene os seguintes grupos de números decimais começando pelo maior:

a) 3,14 – 3,14159 – 3,1416 *b*) 0,3 – 0,003 – 0,0028 – 2,008.

5. 1.º Multiplicando os dois têrmos pelo mesmo número, ache as frações decimais equivalentes a:

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{25},\ \frac{3}{2}.$$

2.º Escreva as frações obtidas com a forma de número decimal.

6. Escreva com a forma de fração decimal, depois simplifique, se possível: 0,4 – 0,6 – 0,75 – 4,2.

7. Qual é maior: 0,75 ou $\frac{3}{5}$? 0,8 ou $\frac{5}{8}$?

8. Cinco mil décimos equivalem a........... dezenas.

9. 45 dezenas equivalem a............centésimos.

10. O valor relativo do algarismo 8 no número 0,2568 é..........vêzes menor do que no número 0,2853.

OPERAÇÕES

33. *Adição e subtração*

1.º) Efetuar a adição 56,7 + 8,43 + 0,57.

Em frações decimais, teremos:

$$\frac{567}{10}+\frac{843}{100}+\frac{57}{100}=\frac{5670}{100}+\frac{843}{100}+\frac{57}{100}.$$

A soma será um número de centésimos. O numerador será dado pela adição (1), à esquerda:

$$S=\frac{6570}{100}=65,70$$

(1)	(2)
5670	56,70
843	8,43
57	0,57
6570	65,70

A adição terá o mesmo resultado se escrevermos os números como na adição (2), da direita, colocando as unidades de mesma ordem em coluna, as vírgulas se correspondendo, que é o procedimento prático conhecido.

2.º) Efetuar a subtração 2,2 – 1,517.

A disposição será ainda a mesma, fazendo-se a redução do minuendo, que pode ser mental:

$$\begin{array}{r}2,200\\ 1,517\\ \hline 0,683\end{array}$$

34. *Multiplicação*

Seja multiplicar 1,7 por 2,43.

Os números dados podem ser escritos com a forma $\frac{17}{10}$ e $\frac{243}{100}$; logo, o produto será, de acôrdo com a regra conhecida:

$$\frac{17}{10}\times\frac{243}{100}=\frac{17\times 243}{1\,000}$$

Observa-se que multiplicamos os números inteiros 17 e 243, e o denominador 1 000 indica que o produto é dado em milésimos, isto é, tem 3 ordens decimais ou *tantas ordens quantas tinham ao todo os fatôres.* Daí, a regra:

> **Multiplicam-se os números decimais como se fôssem inteiros, separando-se no produto tantas ordens decimais quantas houver ao todo nos dois fatôres.**

Exemplos:

```
  34,7        48,4       0,074
   3,5           7         0,5
 -----       -----      ------
  1 735      338,8      0,0370
 10 41
 ------
 12,145
```

Caso particular: **Multiplicador potência de 10.** Exemplos:

1.º) $2,345 \times 10 = \frac{2345}{1000} \times 10 = \frac{2345}{100} = 23,45$

2.º) $2,345 \times 100 = \frac{2345}{1000} \times 100 = \frac{2345}{10} = 234,5.$

> **Para multiplicar por 10, 100 ou 1 000, deslocamos a vírgula para direita tantas ordens quantos forem os zeros do multiplicador.**

$12,875 \times 10 = 128,85$; $12,875 \times 1000 = 12\,875$

35. *Divisão de números decimais*

Primeiro caso. **O divisor é inteiro.** Seja dividir 47,76 por 24.

Efetua-se a divisão como se o dividendo *fôsse inteiro e coloca-se a vírgula no quociente antes de abaixar o algarismo dos décimos do dividendo,* de acôrdo com o dispositivo ao lado.

```
47,76 | 24
23 7  | 1,99
 2 16 |
    0 |
```

Realmente, o quociente da divisão de 4 776 unidades por 24 é 199 unidades; logo, o quociente de 4 776 centésimos será 199 centésimos.

É importante observar que o número de algarismos decimais do quociente é igual ao do dividendo.

Segundo caso. **O divisor é decimal.** Seja dividir 3,927 por 2,31.

Se multiplicarmos o dividendo e o divisor por 100, o quociente não se alterará, e o divisor se transformará no número 231, o que reduz a divisão ao caso anterior. Assim, no exemplo em aprêço, efetua-se a divisão de 392,7 por 231 pela regra do primeiro caso:

```
3,927 | 2,31
1 617 | 1,7
    0 |
```

O quociente é 1,7.

Caso particular: **Divisor potência de 10.** Exemplos:

1.º) $23,7 : 10 = \frac{237}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{237}{100} = 2,37$

2.º) $23,7 : 100 = \frac{237}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{237}{1000} = 0,237.$

> **Para dividir por 10, 100 ou 1 000, deslocamos a vírgula para esquerda tantas ordens quantos forem os zeros do divisor.**

$34,9 : 10 = 3,49$; $35 : 100 = 0,35.$

36. *Aplicações*

- Efetue as operações:

1. (43,81 + 15,08) − (18,715 + 9,32)
2. (38 − 17,3) − (47,83 − 28)
3. 43,2 × 17 + 37,5 × 13
4. (14,7 + 3,01) × (15,3 − 8)
5. 25,83 : 14,35
6. 45,9 : 18,36
7. (2,5 : 5 + 32 : 0,8) : 0,9
8. $1,2 : 0,04 - 500 \times 0,05 + \frac{2}{5} : \frac{7}{3}$

- Preencha as lacunas:

9. 584,41 × 10 = ...; 47,27 × 0,01 = ...;
 44,4 : 10 = ...; 24,3 × 100 = ...;
 3 82,73 : 100 = ...; 5,38 : 0,01 = ...
10. O produto de 0,45 por 3,6 equivale ao produto de .... por 0,15.
11. Somei......... aos 3/5 de 0,2 e achei para resultado a unidade.
12. Multiplicar um número por 0,3 equivale a dividí-lo por.........
13. Dividir um número por 0,4 é o mesmo que multiplicá-lo pela fração irredutível.............
14. Dividindo um número por 0,8, obteremos os...... do número.
15. O quociente da divisão do número...... por 0,24 é igual ao número aumentado de 57.

RESPOSTAS:

1. 30,855	4. 129,283	7. 45	10. 10,8	13. 5/2
2. 0,87	5. 1,8	8. $5\frac{6}{35}$	11. 22/25	14. 5/4
3. 1 221,9	6. 2,5	9.	12. $3\frac{1}{3}$	15. 18.

37. *Quocientes aproximados. Conversões*

O quociente exato de dois números decimais é, em geral, uma fração ordinária.

$$\text{Assim: } 23,8 : 10,2 = \frac{238}{10} : \frac{102}{10} = \frac{238}{10} \times \frac{10}{102} = \frac{238}{102} = \frac{7}{3}$$

A fração 7/3 é o **quociente exato** de 23,8 por 10,2.

Se quisermos achar o quociente com a forma de **número decimal**, obteremos apenas um **valor aproximado,** sendo o **êrro** menor que uma unidade da última ordem encontrada. Nas divisões:

```
12,47 | 2,3       22,378 | 5,4       4,500 | 7
 97   | 5,4         77   | 4,14       30  | 0,642
  5                 238                20
                     22                 6
```

os quocientes 5,4; 4,14 e 0,642 são **aproximados;** o primeiro com **êrro menor que** 0,1, o segundo com **êrro menor que** 0,01 e o terceiro com **êrro menor que** 0,001.

O quociente aproximado pode ser obtido com êrro menor que uma unidade fracionária qualquer, bastando para isso colocar um zero à direita do último resto e continuar a divisão; isto corresponde a acrescentar zeros à direita do dividendo decimal, o que não lhe altera o valor. Exemplos:

1.º) Calcular o quociente da divisão de 14,58 por 3,7 com êrro menor que 1 centésimo.

De acôrdo com a regra de divisão temos:

```
145,8 | 3,7
 34 8 | 3,94
  1 50
     2
```

O quociente com êrro menor que 0,01 é 3,94.

2.º) O mesmo critério é aplicável à divisão de números inteiros.

```
23 | 7
20 | 3,28
60
 4
```

Assim, o quociente da divisão de 23 por 7, com êrro menor que 0,01, obtém-se dispondo a operação como se vê ao lado.

38. *Conversão das frações ordinárias em números decimais*

A fração ordinária representa o quociente da divisão do numerador pelo denominador. A conversão em decimal far-se-á, portanto, efetuando a divisão do numerador pelo denominador e exprimindo o quociente em forma decimal, como vimos no último exemplo.

Exemplo:

Converter $\frac{7}{20}$ em decimal.

Efetuando a divisão obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 20 \\ \hline 100 & 0{,}35 \\ 0 & \end{array}$$

Resulta: $\frac{7}{20} = 0{,}35.$

Observemos que, ao efetuarmos a divisão, acrescentamos zeros à direita do numerador e dos restos sucessivos, o que corresponde a multiplicar o numerador por 10, 100 etc. Ora, a fração ordinária dada, deve ser irredutível e as multiplicações citadas introduzem no dividendo, apenas, os fatôres 2 e 5; conclui-se, pois, que o quociente só será expresso em decimal exata, quando o denominador contiver sòmente os fatôres 2 e 5. Neste caso diz-se que a decimal obtida é finita ou exata.

Consideremos por exemplo a fração irredutível $\frac{11}{40}$, cujo denominador contém apenas os fatôres 2 e 5, isto é,

$$40 = 2^3 \times 5$$

Quando acrescentarmos o *terceiro* zero ao *numerador*, obteremos o resto zero, pois, o número terminado em três *zeros* é divisível por 2^3 e 5 e, portanto, será por 40.

Assim, a fração $\frac{11}{40}$ se converterá em uma *decimal exata* ou *finita* com três algarismos decimais.

Realmente:

$$\begin{array}{r|l} 110 & 40 \\ \hline 300 & 0{,}275 \\ 200 & \\ 0 & \end{array}$$

e, portanto, $\frac{11}{40} = 0{,}275.$

Ao contrário, se o denominador contiver qualquer fator diferente de 2 e 5, a introdução dêsses fatôres no numerador não o tornará divisível pelo denominador, e o quociente *nunca* será expresso em decimal exata, por mais que se prolongue a divisão. Exemplo:

Seja a fração $\frac{6}{11}$, cujo denominador contém o fator 11.

Tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 11 \\ \hline 50 & 0{,}545\,4 \\ 60 & \\ 50 & \end{array}$$

A decimal 0,545 4 é um valor aproximado de $\frac{6}{11}$ com êrro menor que 0,000 1.

Observe-se que, sendo os restos das divisões por 11, menores que o divisor, só pode haver *dez* restos diferentes; logo, a partir de certa divisão, os restos repetir-se-ão necessàriamente, reaparecendo no quociente, *periòdicamente*, os algarismos já encontrados, na mesma ordem 5, 4, 5, 4, etc.

O número decimal resultante é denominado por isso, *periódico* ou *dízima periódica*, denominando-se *período* o grupo de algarismos que se repete.

A dízima periódica escreve-se, assinalando o período com uma das formas:

0,545 4 . . . ; $0{,}\overline{54}$ 0,[54]   ou   0,(54)

39. *Dízimas periódicas*

Há duas espécies de dízimas periódicas, denominadas **simples** e **compostas.**

A dízima periódica é simples, quando o período começa logo após a vírgula. Exemplos:

0,333 . . . ; 4,(7) ; 5,(37)

A dízima periódica é composta, quando entre a vírgula e o período há algarismos que não se repetem, e formam a *parte não periódica* ou *anteperíodo.* Exemplos:

0,48(6) ; 5,322 727 . . .

A fração ordinaria que dá origem a uma dízima denomina-se **geratriz** da dízima.

40. *Caracteres de convertibilidade*

São três os princípios que permitem determinar a natureza da *decimal* em que se converterá uma fração ordinária dada.

a) A fração irredutível, cujo denominador contém apenas os fatôres primos 2 e 5, converte-se numa decimal exata ou finita, cujo número de algarismos decimais é igual ao maior dos expoentes do fator 2 ou 5.

b) A fração irredutível, cujo denominador contém apenas fatôres diferentes de 2 e 5, converte-se numa dízima periódica simples.

c) A fração irredutível, cujo denominador contém os fatôres 2 ou 5 com outros diferentes de 2 e 5, converte-se numa periódica composta.

EXERCÍCIOS

Dizer a espécie de decimal em que se transformam as frações seguintes, e o número de algarismos das exatas.

1) $\frac{5}{8}$ 2) $\frac{19}{75}$ 3) $\frac{36}{45}$ 4) $\frac{17}{45}$

41. *Conversão das dízimas periódicas simples em frações ordinárias*

Transformando as frações $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ etc., em decimais, encontraremos as dízimas:

$$0,11\ldots\ldots = \frac{1}{9}$$

$$0,010\,1\ldots\ldots = \frac{1}{99}$$

$$0,001\,001\ldots\ldots = \frac{1}{999}$$

Observa-se que a geratriz de uma dízima, cujo período é igual a uma unidade fracionária decimal, é uma fração, cujo denominador é formado de tantos noves quantos são os algarismos do período e cujo numerador é 1.

Obtido êsse resultado, podemos calcular a geratriz de uma dízima periódica simples qualquer. Exemplos:

1.º) Calcular a geratriz de 0,323 2. . . Temos:

$$0,323\,2\ldots = 32 \times 0,010\,1\ldots = 32 \times \frac{1}{99} = \frac{32}{99}$$

2.º) $0,231\,231\ldots = 231 \times 0,001\,011\ldots = 231 \times \frac{1}{999} = \frac{231}{999}$

Conclui-se a regra:

A geratriz de uma dízima periódica simples, com parte inteira nula, é uma fração que tem para numerador um dos períodos e para denominador um número formado de tantos noves, quantos são os algarismos do período.

Se a decimal tem parte inteira diferente de zero, soma-se a parte inteira com a geratriz da periódica. Exemplos:

1.º) Calcular a geratriz de 2,(36). Temos:

$$2{,}(36) = 2 + 0{,}(36) = 2 + \frac{36}{99} = 2 + \frac{12}{33} = \frac{78}{33}$$

A geratriz é $\frac{78}{33}$.

2.º) Geratriz de 2,(81).

$$2{,}(81) = 2 + 0{,}(81) = 2 + \frac{81}{99} = 2 + \frac{9}{11} = \frac{31}{11}.$$

42. *Conversão das dízimas periódicas compostas em frações ordinárias*

Seja a dízima 0,4(7).

A parte não periódica, 4, contém um algarismo. Multiplicando a dízima por 10, obteremos a periódica simples 4,(7) cuja geratriz sabemos calcular:

$$4{,}(7) = 4 + \frac{7}{9} = \frac{4 \times 9 + 7}{9}$$

Como multiplicamos a dízima dada por 10, sua geratriz será 10 vêzes menor que a de 4,(7), isto é:

$$0{,}4(7) = \frac{4 \times 9 + 7}{90}$$

Multiplicar 4 por 9 é o mesmo que multiplicar por 10 - 1; logo, temos:

$$0{,}4(7) = \frac{4(10-1) + 7}{90} = \frac{40 - 4 + 7}{90} = \frac{47 - 4}{90}$$

Observa-se a *regra:*

> **A geratriz de uma dízima periódica composta com parte inteira nula é uma fração, cujo numerador é formado da parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica, e cujo denominador é um número formado de tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.**

Exemplos:

1.º) $0{,}4(6) = \frac{46-4}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$

2.º) $0{,}24(36) = \frac{2\,436 - 24}{9\,900} = \frac{2\,412}{9\,900} = \frac{67}{275}$

Se a decimal tem parte inteira, procede-se como indicamos na pesquisa da geratriz das periódicas simples.

Caso excepcional. As dízimas periódicas, cujo período é 9, não têm geratriz. Assim, aplicando as regras às seguintes dízimas, encontraremos:

$$0{,}999\ldots = 1$$

$$0{,}499\ldots = \frac{1}{2}$$

que são números exatos.

43. *Operações com as dízimas periódicas*

As dízimas periódicas não são valores exatos; devem, por isso, ser substituídas nos cálculos por suas geratrizes. Exemplo:

Seja dividir 0,(148) por 2,2(6). Temos:

$$0{,}(148) : 2{,}2(6) = \frac{4}{27} : \frac{34}{15} = \frac{\not{4}^{2}}{\not{27}^{9}} \times \frac{\not{15}^{5}}{\not{34}^{17}} = \frac{10}{153}$$

EXERCÍCIOS

1. *Converta em números decimais as frações:*

$$\frac{2}{3},\ \frac{32}{99},\ \frac{9}{36},\ \frac{73}{150}$$

2. *Calcule a geratriz das dízimas:*

0,(6) 3,(32) 0,083... 2,2(6) 0,(148) 2,1(3)

3. *Diga a espécie de dízimas em que se transformam as frações, sem efetuar a transformação:*

$$\frac{6}{21},\ \frac{15}{65},\ \frac{18}{45},\ \frac{24}{90},\ \frac{15}{24},\ \frac{73}{105}$$

● **Complete as lacunas:**

4. A fração ordinária equivalente a 3,6 que tem para denominador 20 é..........

5. A fração ordinária irredutível equivalente a 2,88 é..........

6. A fração de numerador 90 equivalente a 0,75 é..........

● **Efetue as operações:**

7. 0,(63) + 5,(81) 8. 0,2(6) : 0,6(14)

● **Resolva as expressões:**

9. $3{,}4(1) + 2{,}(3) : 7 \times \frac{1}{3} - 2\frac{2}{9}$

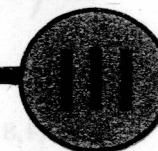
10. $4{,}1(6) - 0{,}8(3) \times 3{,}(3) + 0{,}(5) \times 16{,}7$

RESPOSTAS:

1. 0,(6); 0,(32); 0,25; 0,48(6)

2. $\frac{2}{3}$; $3\frac{32}{99}$; $\frac{1}{12}$; $2\frac{4}{15}$; $\frac{4}{27}$; $2\frac{2}{15}$.

3. Per. simples, per. simples, finita, per. comp., exata, per. comp.

4. $\frac{72}{20}$ 5. $\frac{72}{25}$ 6. $\frac{90}{120}$ 7. $6\frac{5}{11}$ 8. $\frac{33}{76}$ 9. 1,3 10. $10\frac{2}{3}$.

Exercícios de revisão da unidade III

● **Torne irredutíveis as frações:**

1. $\frac{333}{592}$ 2. $\frac{550}{792}$ 3. $\frac{1\,056}{1\,848}$

● **Reduza ao mesmo denominador:**

4. $\frac{5}{36}$, $\frac{13}{54}$ e $\frac{17}{72}$ 5. $\frac{23}{72}$ e $\frac{71}{252}$

● **Escreva em ordem crescente:**

6. $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{9}{14}$ 7. $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ e $\frac{4}{9}$

8. 4,7 e 4,698 9. 5,4 ; 5,39 e 5,401.

10. Extraia os inteiros de $\frac{221}{13}$ e $\frac{1129}{100}$

● **Efetue as operações:**

11. $5 \times \left(\frac{1}{8} + 3\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\right) : \frac{2}{3}$

12. $\left(5\frac{1}{3} : \frac{2}{5} - 3\frac{1}{4}\right) : 2\frac{3}{4}$

13. $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} + \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}}$

14. $\dfrac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}} : \dfrac{\frac{8}{15}}{2\frac{1}{2}}$

15. $\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{5}{8}\right)$

16. $\left(+\frac{5}{7}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)$

17. $(+3) - \left(+\frac{5}{8}\right)$

18. $(+3) - \left(-\frac{5}{8}\right)$

19. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(+4\frac{1}{2}\right) \times (-1)^3$

20. $(-2)^3 \times \left(-2\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{9}{8}\right)$

21. $(4{,}81 + 3{,}14) \times 4 - (5{,}4 - 3{,}23) \times 4$

22. $0{,}(7) : 0{,}(6) + \dfrac{0{,}(4)}{5{,}(3)} - \left(5{,}125 - 3\frac{7}{8}\right)$

● **Preencha as lacunas:**

23. A maior fração própria de denominador 15 é..........

24. As frações mais simples respectivamente equivalentes a $\frac{6}{15}$ e $\frac{4}{8}$, e tais que o denominador da 1.ª é igual ao numerador da 2.ª são..........

25. A fração equivalente a $\frac{10}{15}$, cuja soma dos têrmos é 60 é..........

26. Somei 12 unidades ao numerador da fração $\frac{16}{24}$.
Para não alterar seu valor, devo somar.......... ao denominador.

27. Para formar 42 décimos são necessários.......... milésimos.

28. A diferença entre os valores relativos dos algarismos 6 e 7 no número 362,17 é..........

29. Meia centena equivale a.......... décimos e a...... unidades de terceira ordem decimal.

● **Resolva os problemas:**

30. Pedro gastou 3/4 do que possuía e mais Cr$ 20,00. Ficou com 3/20 da quantia primitiva. Quanto possuía?

31. Dois reservatórios têm juntos 15 200 litros d'água. Tiram-se 600 litros de cada um e o conteúdo do primeiro fica igual aos 3/5 do segundo. Quantos litros tinha dada um?

32. Um fruteiro vendeu 1/5 das laranjas que possuía. Em seguida vendeu 3/8 das que restaram e, finalmente, 1/4 do nôvo resto, tendo ficado com 45 laranjas. Quantas possuía?

33. A soma de dois números é 1,28 e o quociente da divisão do maior pelo menor é 7. Quais são os números?

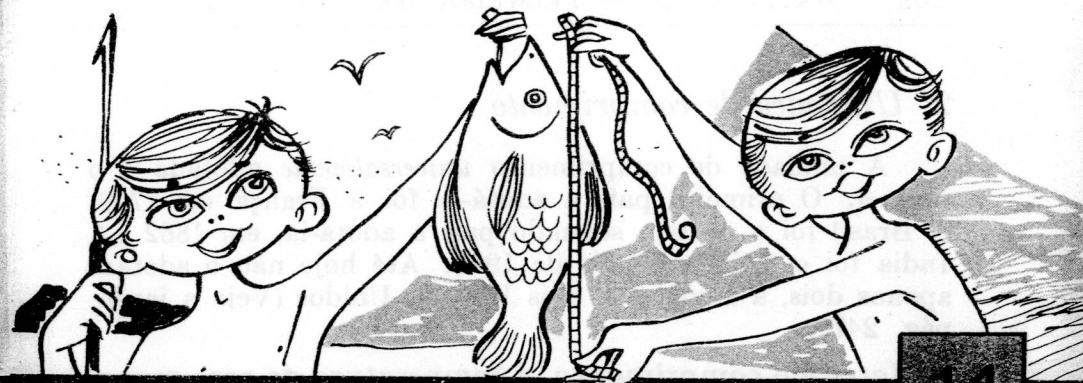
34. Um número aumentado de seus 0,4 dá a soma 25,2. Achar o número.

35. A soma de três números é 85,93. A soma da segunda parcela com a terceira é 72,84 e a segunda é o dôbro da primeira. Achar os três números.

RESPOSTAS:

1. 9/16 2. $\frac{25}{36}$ 3. $\frac{4}{7}$ 4. $\frac{30}{216}$, $\frac{52}{216}$ e $\frac{51}{216}$. 5. $\frac{161}{504}$ e $\frac{142}{504}$

6. $\frac{3}{8}$, $\frac{9}{14}$ e $\frac{5}{7}$ 7. $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$. 8. 4,7 > 4,598 9. 5,401 > 5,4 > 5,39

10. 17 e 11 $\frac{29}{100}$.
11. 30
12. $3\frac{2}{3}$.
13. $1\frac{1}{12}$
14. $3\frac{1}{8}$
15. $-\frac{49}{40}$
16. $\frac{4}{35}$
17. $2\frac{3}{8}$
18. $3\frac{8}{8}$.
19. $-\frac{1}{2}$
20. − 24
21. 23,12
22. 0
23. 14/15
24. 2/5 e 5/10
25. 24/36
26. 18
27. 4 200
28. 59,93
29. 500 e 50 000
30. Cr$ 200,00
31. 5 850 e 9 350
32. 120 laranjas.
33. 0,16 e 1,12
34. 18
35. 13,09; 26,18 e 46,66.

Comprimento. Área. Volume. Massa

COMPRIMENTO

1. *Medida de um comprimento*

Para medir um comprimento, como AB na figura 48 *escolhemos uma* ***unidade,*** suponhamos u e a aplicamos, sôbre o *comprimento a medir*, tantas vêzes quanto possível

$$AB = 6u.$$

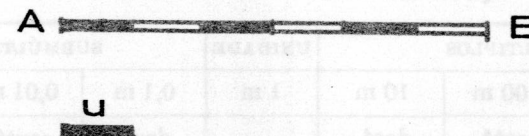



Fig. 48

Se houver necessidade, usaremos *subunidades* (sub-múltiplos) menores que a unidade principal.

Para comprimentos muito grandes, usaremos unidades secundárias (múltiplos), maiores que a principal.

2. *Unidades de comprimento*

A unidade de comprimento *universalmente* adotada é o **metro.** O primeiro país a adotá-la foi a França em 1799. O Brasil foi o décimo segundo país a adotá-la, em 1862. A Índia foi o último, depois de 1940. Até hoje não o adotam apenas dois, a Inglaterra e os Estados Unidos (Veja a jarda, pág. 247).

- ***Metro é o comprimento, à temperatura de zero graus, do padrão internacional em platina iridiada*** (fig. 49), depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres (França).

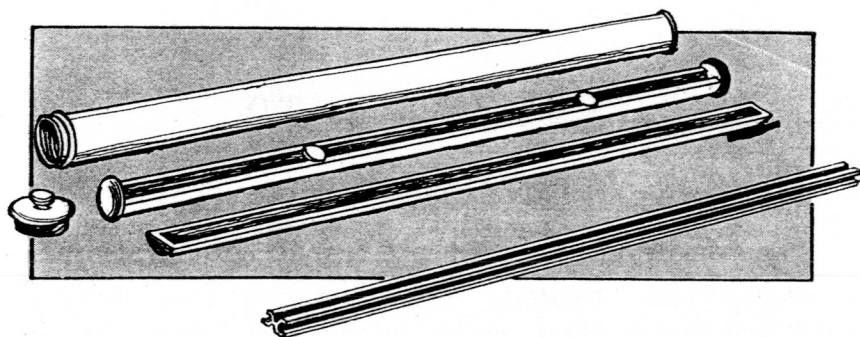



FIG. 49

QUADRO DAS UNIDADES USUAIS

MÚLTIPLOS			UNIDADE	SUBMÚLTIPLOS		
1 000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m
quilô-metro	hectô-metro	decâ-metro	METRO	decí-metro	centí-metro	milí-metro
km	*hm*	*dam*	*m*	*dm*	*cm*	*mm*

OBSERVAÇÕES: 1.ª) Nas medidas referentes à Navegação é usada a *milha marítima internacional* que tem 1 852 metros.

2.ª) Nas medidas de precisão, como ajustagem de peças de máquinas, usa-se o *micron* (μ) que vale um *milésimo do milímetro* ($1\mu = 0{,}000\,001\ m$).

3. *Modo de escrever e ler uma medida de comprimento*

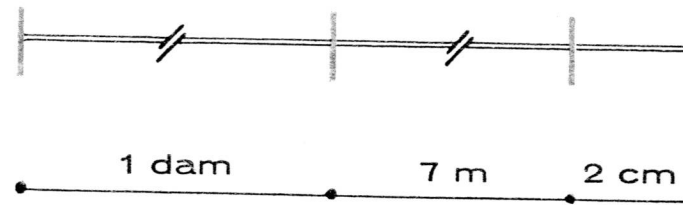



FIG. 50

O comprimento de *A* até *B* tem *1 dam 7m* e *2cm*.

Se usarmos o *quadro* das unidades, escreveremos:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		1	7		2	

Na prática escreve-se o número (a casa dos *dm* preenchida com zero), escolhe-se uma *unidade como principal* e assinala-se o algarismo que a representa colocando a *vírgula à sua direita*, finalmente escreve-se o símbolo da unidade escolhida:

17,02 m

Leitura. Lê-se a *parte inteira* seguida do nome da unidade principal, em seguida, a *parte decimal* seguida do nome da última ordem:

dezessete metros e dois centímetros.

4. *Mudança de unidade*

Podemos colocar a vírgula entre dois algarismos quaisquer, tendo o cuidado de indicar o símbolo do múltiplo adotado como unidade. Assim, a medida acima considerada pode ser escrita de diversos modos:

17,02m = 170,2dm = 1702cm = 1,702dam = 0,1702hm

A mudança de unidade corresponde, pois, a um deslocamento da vírgula. Exemplo:

Converter 2 587,4 m a quilômetros. Recuaremos a vírgula três ordens para a esquerda, colocando-a à direita do algarismo 2, que exprime quilômetros. Temos assim:

2,587 4km

Observação: Para adicionar ou subtrair duas medidas é necessário convertê-las à mesma unidade.

5. *Medidas efetivas e instrumentos de medir*

Chamamos *medidas efetivas* as que correspondem a instrumentos construídos para uso do comércio, indústria etc.

Empregam-se *usualmente* as seguintes:

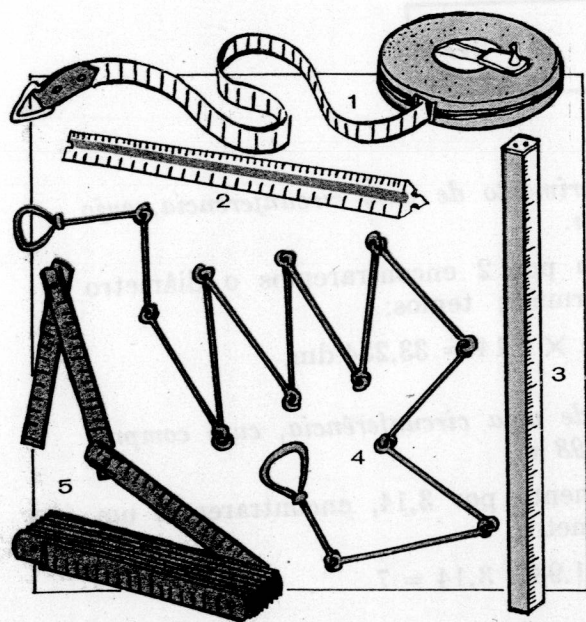



Fig. 51

1) Trena — usada na indústria de construção civil
2) Duplo-decímetro — usado por desenhistas
3) Metro — usado no comércio de tecidos
4) Cadeia de Agrimensor — usada na medida de terras
5) Metro articulado — usado pelos carpinteiros e pedreiros

6. *Perímetro*

Chama-se ***perímetro*** *de um polígono a soma dos comprimentos de seus lados.* Exemplo:

O perímetro de um triângulo, cujos lados medem, respectivamente, 15,7cm, 18,1cm e 9,7cm será:

15,7cm + 18,1cm + 9,7cm = 43,5cm.

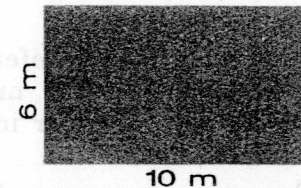
Perímetro do retângulo. Para achar o perímetro do retângulo da figura ao lado, podemos percorrê-lo:

6m + 10m + 6m + 10m

Fig. 52

Examinando esta soma, nós vemos que ela é igual a *duas vêzes a medida do comprimento mais duas vêzes a medida da largura:*

$$6m \times 2 + 10m \times 2 = 12m + 20m = 32m.$$

Esta maneira curta de achar o perímetro pode ser escrita com símbolos, assim:

$$P = 2 \times l + 2 \times c$$

(P = perímetro, l = largura, c = comprimento)

que se chama a **fórmula** do perímetro do retângulo.

A *fórmula* é a tradução em símbolos de uma regra.

Verifique as seguintes *fórmulas* de alguns perímetros, onde *l = lado.*

Triângulo equilátero	$P = 3 \times l$
Quadrado	$P = 4 \times l$
Retângulo	$P = 2 (l + c)$

7. *Comprimento da circunferência*

Para medir o comprimento de uma linha curva em um desenho, emprega-se um instrumento denominado *curvímetro*. O marcador de quilometragem de um automóvel *mede* os comprimentos em linha reta ou curva, *contando* o número de voltas da roda do carro, a qual funciona como um curvímetro.

Para medir a circunferência podemos usar o curvímetro. No entanto é possível medir o comprimento dessa curva *indiretamente*, isto é, por intermédio de uma linha reta que é o seu diâmetro.

Tomemos, por exemplo, um disco de 78 rotações, cujo diâmetro tem 252 mm e marquemos com uma fita adesiva o ponto de referência A, como mostra a figura 53. Façamos o disco girar sôbre uma régua graduada até que o ponto A volte a ficar sôbre ela. Leremos na régua, aproximadamente, 792 mm. Êste é, portanto, o comprimento da circunferência.

Se dividirmos êste último comprimento pelo diâmetro encontraremos:

$$792 \text{ mm} : 252 \text{ mm} = 3{,}14 \text{ (aproximadamente)}$$

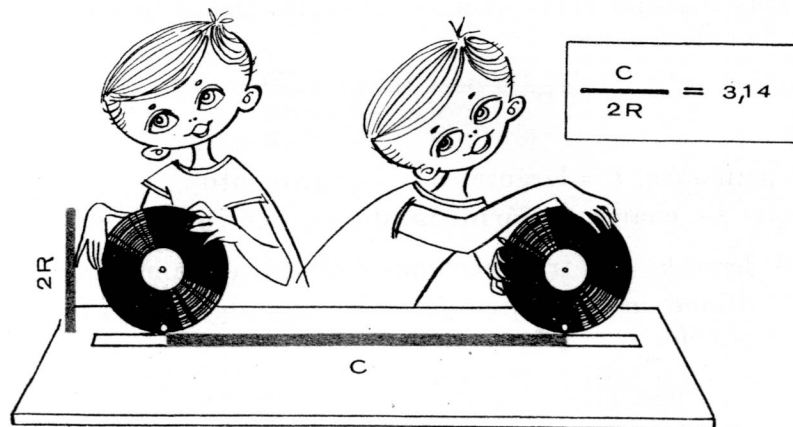



Fig. 53

O quociente aproximado, 3,14, é o mesmo para tôdas as circunferências, como o leitor pode verificar com outros discos.

É claro que se tivermos de medir novamente o comprimento da circunferência, podemos dispensar o trabalho anterior.

Basta multiplicar o diâmetro por 3,14

$$252 \text{ mm} \times 3{,}14 = 792 \text{ mm}$$

Escreve-se, então, a fórmula seguinte, onde C representa o comprimento da circunferência, D o diâmetro e r, o raio:

$$C = D \times 3{,}14 \quad \text{ou} \quad C = 2r \times 3{,}14$$

O quociente 3,14 é um valor aproximado. Representa-se o valor exato do quociente pela letra grega π (pi). A fórmula fica:

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

Exemplos:

1.º) *Calcular o comprimento de uma circunferência, cujo raio tem 5,3dm.*

Multiplicando o raio por 2 encontraremos o diâmetro 10,6dm e aplicamos a fórmula; temos:

$$C = 10{,}6 \text{ dm} \times 3{,}14 = 33{,}284 \text{ dm}.$$

2.º) *Calcular o raio de uma circunferência, cujo comprimento é de 21,98 m.*

Dividindo o comprimento por 3,14, encontraremos um valor aproximado do diâmetro:

$$D = 21{,}98 : 3{,}14 = 7.$$

Se o diâmetro tem 7m o raio terá 3,5m, aproximadamente.

EXERCÍCIOS

● **Complete as lacunas:**

1. 13 800 m = ... km, 0,45 km = ... m, 7 hm = = ... dm
2. 24,85 dam = ... km, 285,7 cm = ... m, 2,38 km = ... dm
3. 38,45 hm + 385,5 m + 4 275 dm = ... dam
4. 9,857 hm − 785,9 dm = ... m, 48,5 cm − 2,86 dm = ... m
5. 28,85 dm × 165 = ... hm, 4,86 dam : 12 = ... m
6. A fórmula do perímetro de um hexágono regular é .... e a da circunferência é ....
7. O perímetro do octógono regular de lado igual a 6 m é ....

● **Resolva:**

8. Calcular o perímetro de um retângulo, cujas dimensões têm, respectivamente, 39 cm e 18 cm.
9. Calcular o perímetro do triângulo, cujos lados medem 5 cm, 7 cm e 9 cm.
10. A base de um retângulo tem 45 cm e a altura vale 2/3 da base. Calcular o perímetro.
11. Calcular o comprimento de uma circunferência, cujo raio mede 0,35m.
12. Calcular o comprimento de uma circunferência, cujo diâmetro mede 1,20 m.
13. As rodas de uma bicicleta têm 55 cm de diâmetro. Se a roda dá 1 800 voltas, que distância percorre a bicicleta, em km?
14. A roda grande de uma engrenagem tem 75 cm de raio e a pequena 45 cm. Quantas voltas faz a roda pequena, quando a grande faz 900?
15. Calcular a base de um retângulo, cujo perímetro tem 3,5 m e a altura tem 4,5 dm.

RESPOSTAS:

3. 465,8 dam
4. 907,11 m e 0,199 m
5. 4,760 25 hm e 4,05 m
6. $6l$ e $2\pi r$
7. 48 m
8. 114 cm
9. 21 cm
10. 150 cm
11. 2,198 m
12. 3,768 m
13. 3,108 6 km
14. 1 500
15. 1,3 m

ÁREA

8. *Área*

Em matemática a palavra *área* indica o resultado da medida de uma superfície.

A medida de uma superfície pode ser feita escolhendo-se uma *unidade*, e verificando quantas vêzes a superfície contém essa unidade.

O retângulo da figura 54 contém 12 vêzes o quadrado *u*. Assim, a área do retângulo é 12*u*, no caso, 12 *centímetros quadrados*.

9. *Unidades de área*

Consideremos o segmento *a* (1cm, fig. 54) como unidade de comprimento e construamos o quadrado *u* (fig. 54), cujo lado seja esta unidade de comprimento. Considera-se, então, a área dêsse quadrado como a unidade de área.

A unidade de área é um quadrado, cujo lado é a unidade de comprimento.

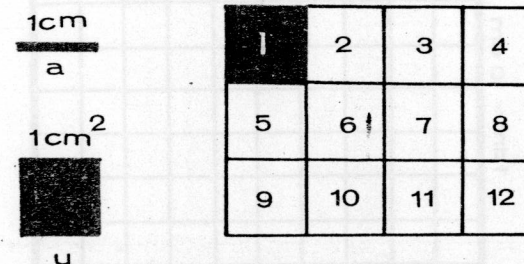



FIG. 54

Se a unidade de comprimento fôr *um metro*, a unidade de área será o quadrado, cujo lado tiver um metro, e que

se denomina *metro quadrado*. E assim por diante, podemos formar tantas unidades de área quantas forem as de comprimento. Na fig. 54, a unidade *u* é o *centímetro quadrado*.

QUADRO DAS UNIDADES

Múltiplos	QUILÔMETRO QUADRADO — km^2 — quadrado de 1km de lado
	HECTÔMETRO QUADRADO — hm^2 — quadrado de 1 hm de lado
	DECÂMETRO QUADRADO — dam^2 - quadrado de 1 dam de lado
	METRO QUADRADO — m^2 — quadrado de 1m de lado.
Submúltiplos	DECÍMETRO QUADRADO — dm^2 — quadrado de 1 dm de lado
	CENTÍMETRO QUADRADO — cm^2 — quadrado de 1 cm de lado
	MILÍMETRO QUADRADO — mm^2 — quadrado de 1 mm de lado

10. *Relação entre as unidades de área*

Trace um quadrado de 1dm de lado, como o da figura 55. Divida os lados em 10 partes iguais. Cada parte terá 1cm. Trace pelos pontos de divisão paralelas aos lados como mostra a figura.

A superfície ficará dividida em 100 quadrados iguais de 1cm de lado:

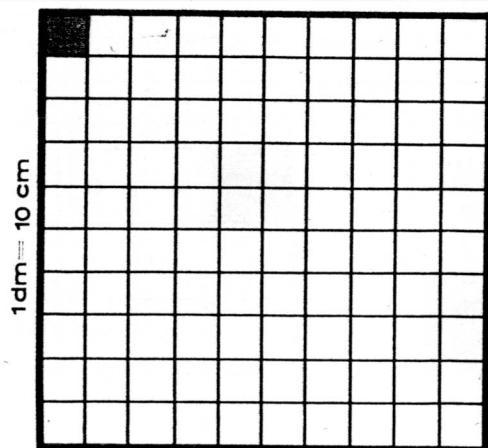



FIG. 55

● ***Uma unidade de área é igual a 100 unidades de ordem imediatamente inferior.***

Então: $1\ km^2$ vale $100\ hm^2$
$1 hm^2$ vale $100\ dam^2$

e assim por diante.

11. *Expressão decimal de uma medida de área*

O número de unidades de uma ordem pode atingir 99 sem formar uma unidade de ordem superior. Para **cada unidade** correspondem, portanto, **duas ordens** (unidades e dezenas). No quadro seguinte vêem-se reservadas duas ordens para cada unidade:

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
d	*u*	*d*	*u*	*d*	*u*	*d*	*u*	*d*	*u*	*d*	*u*	*d*	*u*
					2	5	3		7				
							7		8		9		

Para escrever os números referidos a uma certa unidade, é necessário preencher com zeros as ordens que correspondem às colunas em branco, colocar a vírgula na ordem que corresponde à unidade a que se quer referi-los e escrever, à direita, o símbolo da mesma unidade. O resultado da medida, escrito na primeira linha do quadro anterior

$$2dam^2\ 53m^2\ e\ 7dm^2,$$

expresso em m^2, será

$$253{,}07m^2.$$

O da segunda linha, expresso em dm^2, será

$$708{,}09dm^2.$$

- ***Para exprimir uma área em uma nova unidade imediatamente superior desloca-se a vírgula duas ordens para esquerda:***

$$253{,}07m^2 = 2{,}5307 \text{ dam}^2 = 0{,}025\,307 \text{ hm}^2$$

- ***Para exprimir uma área em uma nova unidade imediatamente inferior desloca-se a vírgula duas ordens para direita:***

$$7{,}0809 \text{ m}^2 = 708{,}09 \text{ dm}^2 = 70\,809 \text{ cm}^2 = 7\,080\,900 \text{ mm}^2.$$

12. *Unidades agrárias*

Na medida das superfícies dos campos usam-se unidades chamadas *agrárias* (de agri = campo, que se vê em *agricultura* = cultivo do campo, em *agrimensor* — pessoa que mede o campo).

Eis o quadro dessas unidades:

múltiplo	HECTARE (*ha*)	1ha = 100 a = 1 hm²
unidade principal	ARE (*a*)	1 a = 1 dam²
submúltiplo	CENTIARE (*ca*)	1 ca = 0,01 a = 1 m²

13. *Medidas efetivas e instrumentos de medir*

Não há medidas efetivas. As medidas são obtidas *indiretamente*, por intermédio de *certos comprimentos*, como veremos a seguir.

14. *Área do retângulo*

Consideremos o retângulo da figura 54, cujo comprimento ou **base** tem 4 cm e cuja largura ou **altura** tem 3cm (o segmento a, de 1cm, é a unidade de comprimento).

Traçando paralelas aos lados, como mostra a figura, o retângulo fica dividido em quadrados de lado a, isto é, em *centímetros quadrados.*

A área do retângulo é o número de quadrados contidos em sua superfície. Em cada fila há *quatro* quadrados; como são *três* filas, haverá ao todo:

$$4 \times 3 = 12 \text{ quadrados}$$

A área do retângulo é igual ao produto dos números que medem a base e a altura, com a mesma unidade.

Representando a área por S, a medida da base por b e a da altura por h, escrevemos abreviadamente a fórmula:

$$S = bh$$

Exemplo:

Calcular a área de um retângulo de 15m de base e 20m de altura.

Temos a área em metros quadrados:

$$S = (15 \times 20)\text{m}^2 = 300 \text{ m}^2$$

15. *Área do quadrado*

O quadrado é um retângulo, cujas dimensões são iguais; logo, representando por l a medida do lado, a área será:

$$S = l^2$$

16. *Área do paralelogramo*

Desenhe um paralelogramo, como $ABCD$ da parte superior da fig. 56. Corte pela altura h e coloque o triângulo destacado na posição em que aparece abaixo na figura 56.

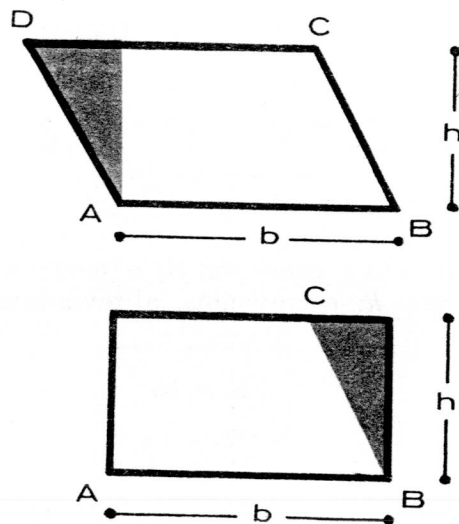



Fig. 56

Verifica-se, então, que o paralelogramo $ABCD$ tem a mesma área do retângulo da mesma base (b) e da mesma altura (h).

A área do paralelogramo obtém-se, multiplicando a base pela altura.

Fórmula $S = bh$

Exemplo:

Calcular a área de um paralelogramo, cuja base mede 8,5dm e a altura 36cm.

Reduzindo as dimensões à mesma unidade e aplicando a fórmula, obteremos a área, por exemplo em decímetros quadrados:

$$S = 8{,}5 \times 3{,}6 = 30{,}60 \text{ dm}^2.$$

17. *Área do triângulo*

O triângulo ABC é a metade do paralelogramo $ABCD$, como podemos observar na figura 57. Como a área do paralelogramo é o produto da base pela altura, a do triângulo será a metade, isto é:

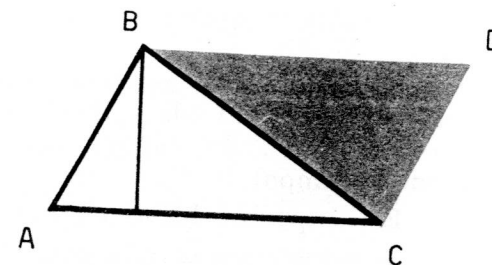



Fig. 57

A área de um triângulo qualquer é a metade do produto da base pela altura.

Fórmula: $S = \dfrac{bh}{2}$

Exemplo:

Calcular a área de um triângulo, cuja base mede 122cm e a altura 9,5dm.

Reduzindo as duas medidas à mesma unidade e aplicando a fórmula, obteremos:

$S = \dfrac{122 \times 95}{2} = 61 \times 95 = 5\,795$. A área é de $5\,795 \text{ cm}^2$.

18. *Área do trapézio*

Se nós tivermos um trapézio $ABCD$ e o desenharmos ao lado, com as bases invertidas, como mostra a figura 58 em que o trapézio repetido será em colorido, **obtemos um paralelogramo que será o dôbro do trapézio.**

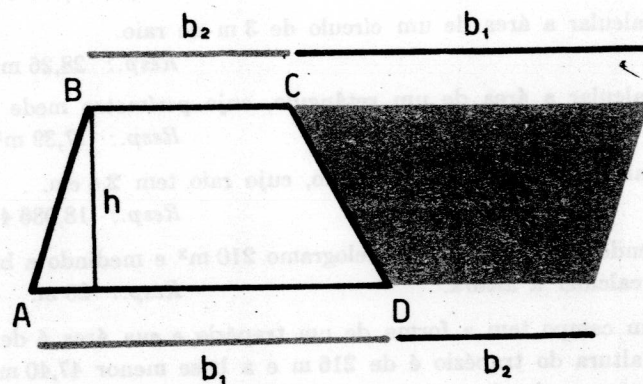



Fig. 58

A base do paralelogramo é $b_1 + b_2$, isto é, a soma das bases do trapézio.

A área do paralelogramo será, portanto:

$$S = (b_1 + b_2) \times h$$

Como o paralelogramo é o dôbro do trapézio, a área dêste será

$$\boxed{S = \frac{b_1 + b_2}{2} \times h}$$

A área do trapézio tem por medida o produto da semi-soma das bases pela altura.

19. *Área do círculo*

Consideremos uma circunferência dividida sucessivamente em 4, 8, 16 ... partes iguais, como mostra a fig. 58-A, e tracemos os segmentos do centro aos vértices dos polígonos obtidos.

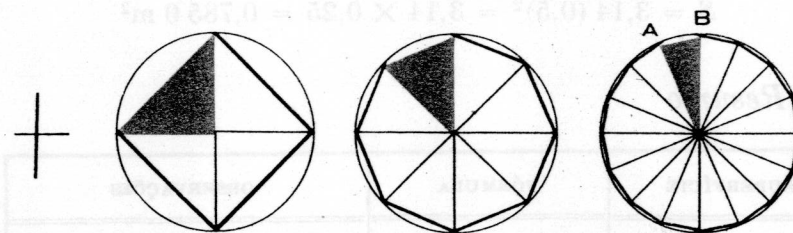



Fig. 58-A

Considerando a última divisão, o arco correspondente a uma das partes será a décima sexta parte da circunferência,

$$\frac{C}{16} \text{ ou } \frac{2\pi r}{16}.$$

Quanto maior fôr o número de triângulos que ficam formados, como OAB, tanto mais a base se aproximará do arco considerado e a altura, do raio; considerando, assim, a área de um dêsses triângulos será, aproximadamente, o produto do raio pela metade do arco:

$$r \times \frac{\pi r}{16} \text{ ou } \frac{\pi r^2}{16}$$

Como o círculo contém 16 dessas partes, sua área será 16 vêzes maior; logo, temos:

$$S = 16 \times \frac{\pi r^2}{16}$$

Simplificando o fator 16, resulta a fórmula:

$$S = \pi r^2$$

Exemplo:

A área de um círculo de 0,5 m de raio será.

$$S = 3{,}14\,(0{,}5)^2 = 3{,}14 \times 0{,}25 = 0{,}785\,0\ \text{m}^2$$

20. *Resumo*

SUPERFÍCIE	FÓRMULA	OBSERVAÇÕES
TRIÂNGULO	$S = \frac{bh}{2}$	1 — É preciso exprimir com a *mesma unidade* as dimensões utilizadas no cálculo da área;
QUADRILÁTEROS:		2 — A área obtida é expressa na unidade correspondente.
Retângulo	$S = bh$	
Paralelogramo . .	$S = bh$	
Quadrado	$S = l^2$	
Trapézio	$S = \frac{b_1 + b_2}{2} \times h$	
CÍRCULO . .	$S = \pi r^2$	

EXERCÍCIOS

Complete as lacunas:

1. $4{,}351\ \text{hm}^2$ = ---- m^2 $247\ \text{dam}^2$ = ------------ m^2
   $0{,}207\ \text{km}^2$ = ------------ m^2 $32{,}406\ \text{ha}$ = ------------ m^2
   $732\ \text{dm}^2$ = ------------ a $281\ \text{m}^2$ = ------------ a
2. $4{,}07\ \text{hm}^2 + 487\ \text{m}^2 + 270\ \text{dm}^2 + 325{,}07\ \text{dam}^2$ = --------- dam^2
3. $4{,}07\ \text{hm}^2 - 24\,506\ \text{m}^2$ = --------- hm^2 ; $3\ \text{ha} - 28\,270\ \text{m}^2$ = ------ a

Resolva:

4. Calcular a área de um triângulo, cuja base é a metade da altura, tendo esta 0,8 m. *Resp.:* 0,16 m^2.
5. Calcular a área de um trapézio, cujas bases medem, respectivamente, 5,8 dm e 49,5 cm e a altura 35 cm. *Resp.:* 18,812 5 m^2.
6. Calcular a área de um retângulo, cuja base tem 0,4 m e a altura 0,43 m. *Resp.:* 0,172 0 m^2.
7. Calcular a área de um círculo de 3 m de raio. *Resp.:* 28,26 m^2.
8. Calcular a área de um retângulo, cujo perímetro mede 16,8 m e a altura 3,7 m. *Resp.:* 17,39 m^2.
9. Calcular a área de um círculo, cujo raio tem 2,4 cm. *Resp.:* 18,086 4 cm^2.
10. Sendo a área de um paralelogramo 210 m^2 e medindo a base 10,5 m, calcular a altura. *Resp.:* 20 m.
11. Um campo tem a forma de um trapézio e sua área é de 2,7 ha. A altura do trapézio é de 216 m e a base menor 47,40 m. Calcular a soma das bases e a base maior. *Resp.:* 250 m; 202,60 m.
12. Achar a área de um quadrado, cujo lado mede 9,7 m. *Resp.:* 94,09 m^2.

VOLUME E CAPACIDADE

21. *Unidade principal*

Unidade de volume é o volume de um cubo, cuja aresta tem o comprimento de um metro.

Essa unidade chama-se **metro cúbico** e representa-se pelo símbolo m^3 (fig. 59).

Outras unidades de volume são obtidas, considerando-se como aresta as demais unidades de comprimento. Assim, o *centímetro cúbico* será o cubo com *1cm de aresta.*

22. *Quadro das unidades usuais*

	NOME	SÍMBOLO
múltiplo	quilômetro cúbico	km^3
unidade principal	METRO CÚBICO	m^3
Submúltiplos	decímetro cúbico	dm^3
	centímetro cúbico	cm^3
	milímetro cúbico	mm^3

23. *Relação entre as unidades*

É fácil verificar pela contagem na figura 59, que $1 m^3$ contém $1\,000 dm^3$.

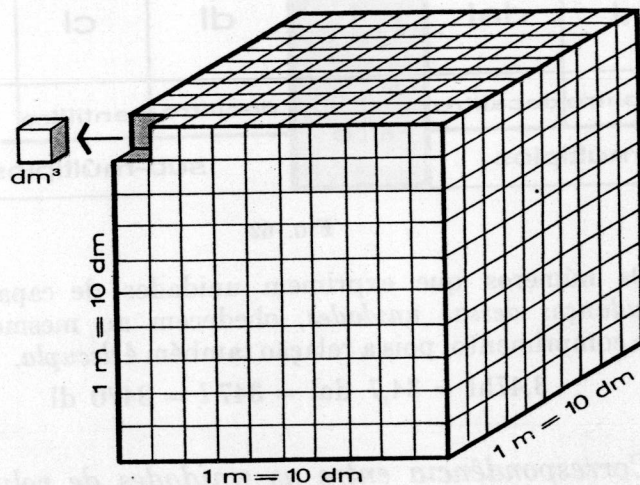



FIG. 59

● ***Uma unidade de volume vale 1000 unidades de ordem imediatamente inferior:***

$1 m^3$ contém $1\,000 dm^3$; $1 dm^3$ contém $1\,000 cm^3$

Nos números que exprimem medidas de volume pode-se atingir 999 sem formar uma unidade de ordem superior Assim, devemos reservar 3 ordens decimais para cada unidade, como vemos no quadro seguinte.

m³						dm³			cm³			mm³		
milhares			unidades											
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u
					8	1	2	5						
				2	5			6		8	3			

FIG. 60

Assim, as medidas que figuram nas duas linhas do quadro, expressas em metros cúbicos, serão escritas:

$$8{,}125 m^3 \quad e \quad 25{,}006\,083 m^3$$

Para ler, enuncia-se a unidade adotada e a menor. A última medida lê-se:

25 metros cúbicos e 6 083 centímetros cúbicos.

Para mudar a unidade, desloca-se a vírgula de 3 em 3 ordens:

$$25{,}006\,083 m^3 = 25\,006{,}083 dm^3$$

24. *Volume aparente de lenha*

O metro cúbico, quando utilizado na medida do volume aparente de lenha, pode ser denominado ***estéreo***, cujo símbolo é *st* (figura 61).

Os múltiplos e submúltiplos decimais do estéreo são:

NOMES	SÍMBOLOS	VALORES
decastéreo	dast	10 m^3
estéreo	st	1 m^3
decistéreo	dst	0,1 m^3

Chama-se *volume aparente* porque, entre a madeira empilhada, ficam numerosos espaços vazios. Na figura 61 vê-se como o estéreo é, na *realidade*, usado no campo para o transporte em caminhão.

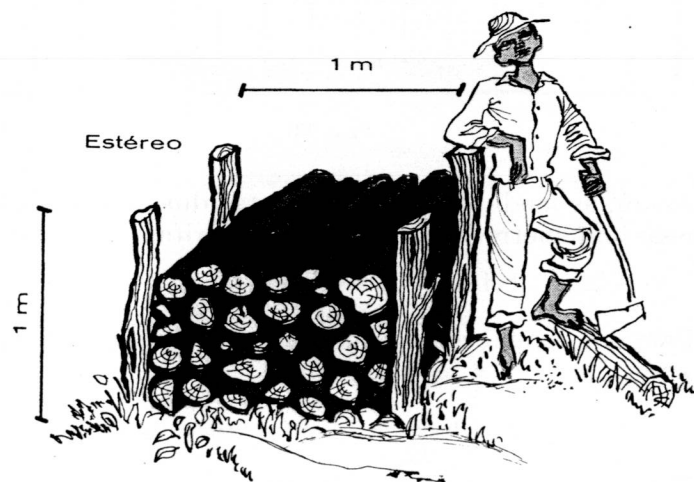



FIG. 61

25. *Unidades de capacidade. Segunda unidade de volume*

Para medir o volume de líquidos, principalmente, emprega-se uma segunda unidade de volume — o **litro**, também chamada *unidade de capacidade*, porque indica a quantidade de líquido que um recipiente é **capaz** de conter.

● ***Litro é o volume de um decímetro cúbico, isto é, o que um dm³ é capaz de conter.***

O símbolo do litro é *l*:

$$1\ l = 1\ dm^3$$

QUADRO DAS UNIDADES

100 l	10 l	1 l	0,1 l	0,01 l	0,001 l
hl	dal	l	dl	cl	ml
hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centilitro	mililitro
múltiplos			sub-múltiplos		

FIG. 62

Os números que exprimem unidades de capacidade, e as *mudanças dessas unidades*, obedecem ao mesmo critério das de comprimento, pois a relação também é *decupla*. Exemplo:

$$3{,}47hl = 34{,}7\ dal = 347\ l = 3470\ dl$$

26. *Correspondência entre as unidades de volume*

$$1m^3 = 1\ 000\ l \qquad 1dm^3 = 1\ l \qquad 1cm^3 = 1ml$$

27. *Medidas efetivas de capacidade*

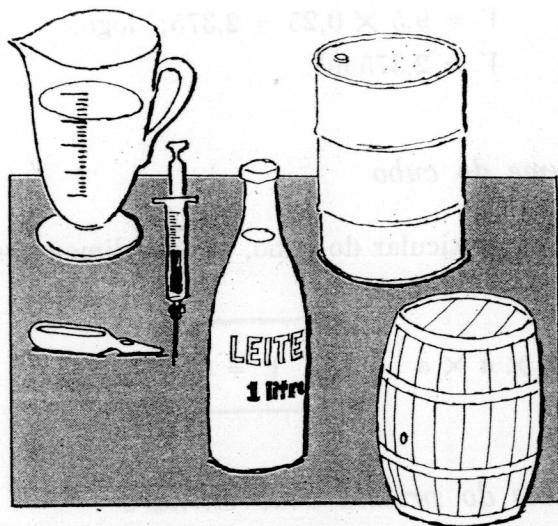



Fig. 63

EXERCÍCIOS

Complete as lacunas:

1. 25 387 dm³ = ... m³   2 845 cm³ = ... m³
2. 5 480 m³ = ... dam³   0,046 m³ = ... cm³
3. 973 dst = ... m³   5,48 dast = ... dm³
4. 283 dm³ + 59 347 cm³ + 2 m³ + 54,47 dm³ = ... m³
5. 28 dast − 98,4 st = ... m³   6. 28 dam³ − 98,4 m³ = ... m³
7. 283,8 dast : 4,8 = ... m³   8. 28,45 dm³ × 41,1 = ... m³
9. 200,3 dal = ... m³   10. 181 m³ = ... dal
11. 34,51 hl + 2,31 m³ + 2 983 dm³ + 38,5 dal = ... hl
12. As três unidades legais de volume são ...., ... e ....
13. Um décimo do metro cúbico vale .... dm³
14. O centilitro vale .... cm³

Respostas:

1. 25,387 m³ e 0,002 845 m³
2. 5,480 dam³ e 46 000 cm³
3. 97,3 m³ e 54 800 dm³
4. 2,396 817 m³
5. 181,6 m³
6. 27 901,6 m³
7. 591,25 m³
8. 1,169 295 m³
9. 2,003 m³
10. 18,1 dal
11. 91,29 hl
12. metro cúbico, litro, estéreo
13. 100 dm³
14. 10 cm³.

28. *Cálculo dos volumes. Fórmulas*

Como para as áreas, não há medidas efetivas de volume.

O volume dos corpos mede-se por intermédio de certos comprimentos, chamados **dimensões.** São então estabelecidas **fórmulas** para o cálculo dos volumes de cada um dos principais sólidos geométricos.

29. *Volume do paralelepípedo retângulo*

Consideremos o paralelepípedo retângulo da figura 64, de altura AB, comprimento AC e largura AD, cujas medidas são, respectivamente, expressas pelos números 3, 4 e 5, sendo a, a unidade de comprimento.

Dividamos as três dimensões em partes iguais à unidade a, e, pelos pontos de divisão, tracemos planos paralelos às faces, como indica a figura. O paralelepípedo fica dessa forma dividido em cubos, cuja aresta, a, é a unidade de comprimento.

O volume do paralelepípedo será o número de cubos iguais a u que êle contiver. O sólido fica decomposto em 5 camadas verticais, contendo cada uma 4 colunas de 3 cubos. Assim, em cada camada haverá 12 cubos; como são 5 camadas, o número total de cubos contidos no corpo será dado pelo produto

$$12 \times 5 \text{ ou } 3 \times 4 \times 5$$

e o volume será de 60 *centímetros cúbicos.*

Conclui-se o princípio:

A medida do volume do paralelepípedo é o produto dos números que medem suas três dimensões.

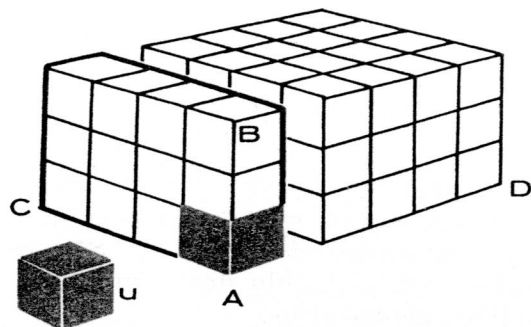



Fig. 64

Se representarmos as três dimensões, respectivamente, por a, b, c, obteremos a fórmula:

$$V = abc$$

Como o produto ab exprime a área da base do paralelepípedo, a fórmula também pode ser escrita:

$$V = Bh$$

onde B representa a área da base e h, a altura.

Exemplo:

Calcular o volume de um paralelepípedo, cuja base tem 9,5 m² de área e a altura 2,5 dm.

Aplicando a última fórmula e reduzindo prèviamente as medidas à mesma unidade, temos:

$V = 9,5 \times 0,25 = 2,375$; logo,

$V = 2,375 \text{ m}^3$.

30. *Volume do cubo*

No caso particular do cubo, as três dimensões são iguais, e a fórmula será:

$V = a \times a \times a$ ou $V = a^3$

31. *Volume do prisma e do cilindro*

Suponhamos um prisma reto ou um cilindro, cuja base tenha 10 cm² e a altura 3 cm (fig. 65-A, 65-B).

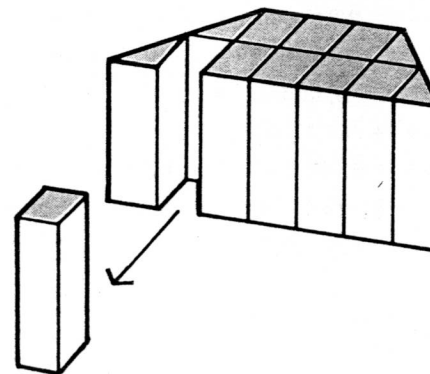



Fig. 65-A

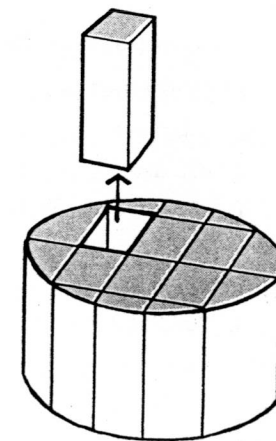



Fig. 65-B

Se, sôbre cada centímetro quadrado, construirmos um paralelepípedo de altura igual à do prisma, como indica a figura 65, o volume de cada paralelepípedo será:

$$1 \times 3 = 3, \text{ isto é, } 3 \text{ cm}^3.$$

Como são 10 os paralelepípedos construídos, o volume será:

$$10 \times 3 = 30 \text{ cm}^3;$$

conclui-se o princípio:

O volume de um prisma ou de um cilindro obtém-se, multiplicando a área da base pela altura.

Fórmulas:

PRISMA: $V = B \cdot h$ CILINDRO: $V = \pi r^2 h$

Exemplo:

Calcular o volume de um cilindro, cujo raio tem 5cm e a altura 25cm.

Aplicando a última fórmula, temos:

$$V = 3{,}14 \times 5^2 \times 25 = 78{,}5 \times 25$$
$$V = 1\,962{,}500 \text{ cm}^3.$$

32. *Volume da pirâmide e do cone*

Observe na figura 66 o cone cheio de líquido colorido e o cilindro vazio, da mesma base e da mesma altura. Se passarmos o líquido do cone para o cilindro, o líquido atingirá apenas 1/3 do cilindro ou, o que é o mesmo, será necessário

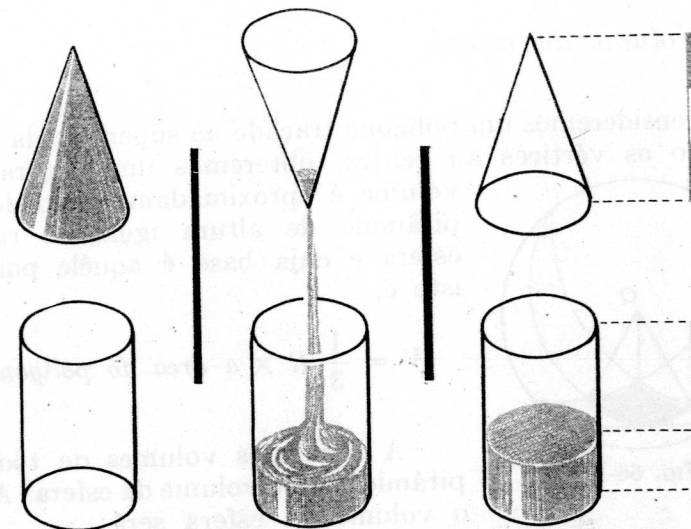



FIG. 66

efetuar *três vêzes* a operação para encher o cilindro. A experiência pode ser feita com copos de papel de forma cônica e cilíndrica.

O mesmo acontecerá com a pirâmide e o prisma.

Conclui-se que os volumes da pirâmide e do cone são um têrço, respectivamente, do prisma e do cilindro de mesma base e de mesma altura. Daí as *fórmulas:*

Volume da pirâmide: $V = \frac{Bh}{3}$

Volume do cone: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Exemplo:

Calcular o volume de uma pirâmide que tem por base um quadrado de 0,25m de lado e por altura 0,66m.

$$V = \frac{(2{,}5)^2 \times 6{,}6}{3} = \frac{6{,}25 \times 6{,}6}{3} = 13{,}750 \text{ dm}^3$$

33. *Volume da esfera*

Consideremos um polígono traçado na superfície da esfera. Unindo os vértices ao centro, obteremos uma figura, cujo volume é aproximadamente o de uma pirâmide de altura igual ao raio da esfera e cuja base é aquêle polígono, isto é,

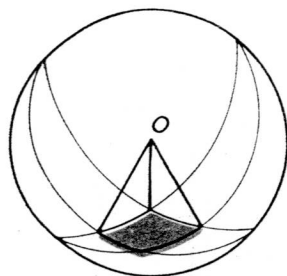



FIG. 66-A

$$V = \frac{1}{3} R \times a \text{ área do polígono}$$

A soma dos volumes de tôdas as pirâmides dá o volume da esfera. Assim, o volume da esfera será

$$\frac{1}{3} \text{ de } R \times a \text{ soma das áreas dos polígonos.}$$

Como a soma dessas áreas não é mais do que a área da esfera, temos:

$$V = \frac{1}{3} R \times 4 \pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

OBSERVAÇÃO: Veremos em classes seguintes que a área da esfera é $4\pi R^2$, sendo R o raio.

34. *Resumo*

CORPO	FÓRMULA	UNIDADES DE VOLUME
Paralelepípedo retângulo	$V = abc$	
CUBO	$V = a^3$	
PRISMA	$V = Bh$	m^3 ; l ; st
PIRÂMIDE	$V = \frac{Bh}{3}$	$1 m^3 = 1 st = 1 kl$
CILINDRO	$V = \pi r^2 h$	$1 dm^3 = 1 l$
CONE	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$	$1 cm^3 = 1 ml$
ESFERA	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	

EXERCÍCIOS

1. Calcular o volume de um cubo que tem 2,9 m de aresta.
Resp.: 24 389 dm^3
2. As dimensões de um paralelepípedo retângulo são, respectivamente, de 1,6 dm, 0,4 dm e 2,7 dm. Calcular, em metros cúbicos, o volume.
Resp.: 0,001 728 m^3
3. Um reservatório de forma cúbica, com 1,2 m de aresta, quantos litros pode conter?
Resp.: 1 728 l
4. Calcular o volume de um cilindro de 4,6 dm de diâmetro de 35 cm de altura.
Resp.: 58,137 1 dm^3
5. Quer-se construir um reservatório cilíndrico com capacidade para 3,14 hl e com 20 cm de raio. Qual deve ser a altura?
Resp.: 25 dm
6. Calcular o volume de um prisma, cuja base é um quadrado de 2,1 dm de lado e cuja altura é igual ao perímetro da base.
Resp.: 37,044 dm^3

7. Calcular o volume de um prisma de 1,2 dm de altura, cuja base é um retângulo de 0,3 m de comprimento e 36 cm de largura. *Resp.*: 12,96 dm³
8. Calcular o volume de um cone de 3 dm de altura e 0,4 m de raio. *Resp.*: 50,24 dm³
9. Calcular o volume de um cone, cuja circunferência da base mede 25,12 dm e cuja altura mede 15 m. *Resp.*: 2,512 m³
10. Calcular o volume de uma pirâmide de 4 m de altura, cuja base é um losango de 20 dm de altura e 20 m de perímetro. *Resp.*: 13,333 m³

MASSA

35. *Unidade legal*

É o **quilograma,** massa do padrão internacional de platina iridiada que se acha depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas (figura 67).

Massa de um corpo é a quantidade de matéria dêsse corpo. Para medir a massa dos corpos empregam-se as *balanças.*

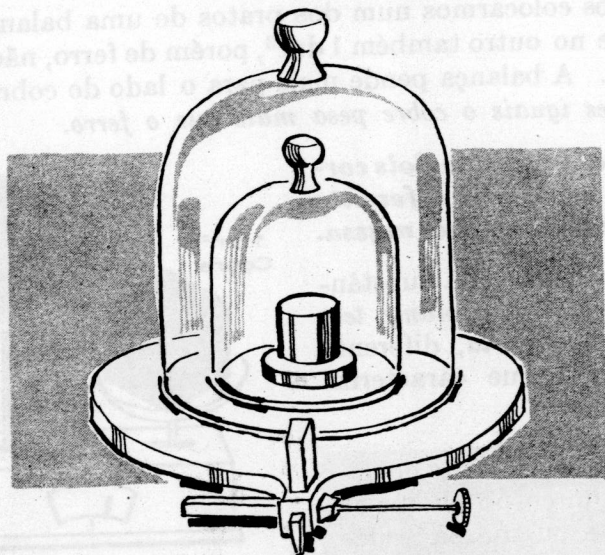



Fig. 67

Pêso de um corpo é a ação da gravidade sôbre a massa dêsse corpo.

Assim, a massa é uma quantidade constante, enquanto o pêso varia com a gravidade. Todavia, vulgarmente emprega-se o têrmo *pêso* significando *massa* e assim, diz-se *pesar* em lugar de *medir a massa* e, daí, o emprêgo das palavras *pesada*, *pesagem*, *pesado* etc.

OBSERVAÇÃO: *O quilograma é a massa de* 1 dm³ *de água distilada à temperatura de* 4°C.

36. *Múltiplos e submúltiplos usuais*

Para formação dos múltiplos e submúltiplos toma-se como base o *grama* que é igual à fração 0,001 da massa do quilograma.

NOMES	SÍMBOLOS	VALORES
tonelada	t	1 000 000 g
quilograma	kg	1 000 g
hectograma	hg	100 g
decagrama	dag	10 g
grama	g	1 g
decigrama	dg	0,1 g
centigrama	cg	0,01 g
miligrama	mg	0,001 g

Nas medidas relativas a pedras preciosas, emprega-se também o *quilate*, massa de 2 decigramas.

37. *Mudança de unidade*

Obedece aos mesmos critérios estabelecidos para as medidas de comprimento. Assim, 7kg, 4hg, 5dag e 6g, pode-se escrever de diversas maneiras:

7,456kg = 745,6dag = 7 456g etc.

38. *Medidas efetivas*

São fabricadas em ferro fundido para as grandes pesadas, em latão ou cobre para as médias, e em lâminas de cobre para as pequenas, nos três tipos indicados na figura 68.

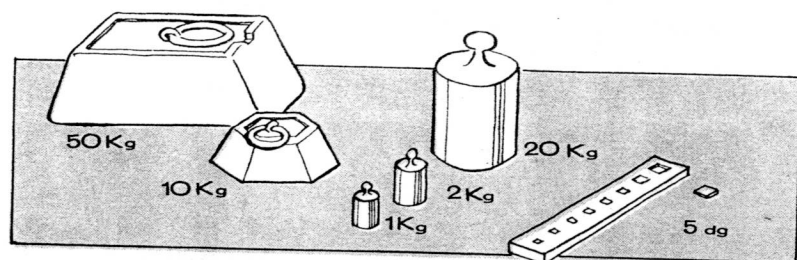



FIG. 68

Para as grandes (primeira figura) variam de 50 kg a ½ dag, numa série de dez.

Para as médias (segunda figura) variam de 20 kg a 1 g, sendo ao todo quatorze.

Para as pequenas (terceira figura) variam de 5 dg a 1 mg, em número de nove, utilizadas nas balanças de precisão.

EXERCÍCIOS

● **Preencha as lacunas:**

1. 1,85 kg = ... g 4,5 t = ... dag 1 293 mg = ... g
2. 5,97 kg + 281,3 dag + 2 821g = ... kg
3. Um litro de água pesa .... kg
4. 3 kg − 183,7 g = ... kg 4 581 − 38,581 hg = ... g
   2,5 t − 1 589,7 kg = ... kg 18 quilates = ... g

● **Resolva:**

5. Uma barra de ferro fundido tem 225 mm de largura e 48 cm de altura. Qual deve ser o comprimento para que ela pese 972 kg, sabendo-se que o ferro pesa 7,2 kg por dm³? *Resp.:* 1,25 m

6. Um padeiro vende a um colégio 300 pães de 250 g. Quanto deve receber, ao preço de Cr$ 12,00 o quilograma? *Resp.:* Cr$ 900,00
7. Um vaso cheio d'água pesa 7,6 kg. Se retirarmos 2/3 dessa água, o pêso reduz-se a 3,6 kg. Qual é a capacidade do vaso? Quanto pesa o vaso quando vazio? *Resp.:* 6 litros; 1,6 kg
8. Um litro de óleo custa Cr$ 35,00. Uma máquina gasta 240 g dêsse óleo por dia. O óleo pesa 0,8 kg por dm³. Qual a despesa mensal? *Resp.:* Cr$ 315,00
9. Uma tábua de madeira tem 3,6 m de comprimento, 5 m de largura e 8 cm de altura. Calcule o pêso da tábua, sabendo que 1 dm³ dessa madeira pesa 800 g. (I.E.) *Resp.:* 1 152 kg
10. Uma vasilha cheia d'água pesa 1 750 gramas e cheia de óleo pesa 1 600 gramas. A vasilha vazia pesa 250 gramas. Quanto pesa o litro dêsse óleo? (I.E.) *Resp.:* 0,9kg

DENSIDADE

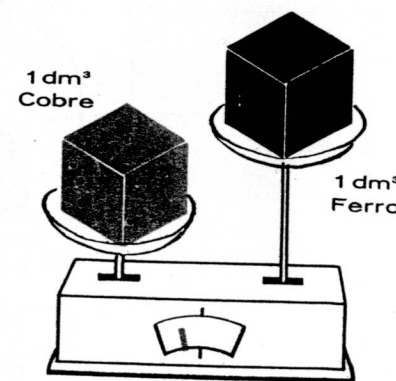
39. *Densidade*

Se nós colocarmos num dos pratos de uma balança 1 dm³ de cobre e no outro também 1 dm³, porém de ferro, não haverá equilíbrio. A balança pende mais para o lado do cobre, isto é, em *volumes iguais o cobre pesa mais que o ferro.*

● ***Volumes iguais de dois corpos de natureza diferente não têm a mesma massa.***

Assim, para cada substância a *unidade de volume tem uma massa própria,* diferente das demais e que caracteriza a substância.

FIG. 69

A massa da unidade de volume de um corpo chama-se **densidade** ou **massa específica** do corpo.

40. *Unidade legal*

A unidade de densidade é a densidade de um corpo para o qual *um centímetro cúbico* tem a *massa de um grama.* É o caso, por exemplo, da água distilada a 4°C. Esta unidade chama-se **grama por centímetro cúbico.** Representa-se com o símbolo g/cm³. Assim 3g/cm³, significa que 1cm³ do corpo pesa 3 gramas.

QUADRO DAS UNIDADES USUAIS

NOMES	SÍMBOLOS	VALORES
grama por centímetro cúbico	g/cm^3	$1g/cm^3$
quilograma por decímetro cúbico.	kg/dm^3	$1g/cm^3$
tonelada por metro cúbico.......	t/m^3	$1g/cm^3$
quilograma por metro cúbico......	kg/m^3	$0{,}001\ g/cm^3$
grama por metro cúbico.........	g/m^3	$0{,}000\ 001\ g/cm^3$

41. *Mudança de unidade*

As mudanças de unidade não oferecem dificuldade. São utilizadas nessas mudanças os valores do quadro de múltiplos e submúltiplos. Exemplos:

1.°) Referir ao g/cm³ a massa específica de 0,8kg/*l*

O litro é equivalente ao dm³. Assim temos:

$$0{,}8kg/l = 0{,}8kg/dm^3 = 0{,}8g/cm^3$$

2.°) Referir ao g/cm³ a massa específica de 38,5kg/m³.

Se 1 metro cúbico pesa 38,5kg, 1 decímetro cúbico pesará 1 000 vêzes menos; assim, temos:

$$38{,}5kg/m^3 = 0{,}038\ 5kg/dm^3 = 0{,}038\ 5g/cm^3$$

42. *Problemas*

A grandeza massa específica ou densidade absoluta é, como sabemos, uma grandeza composta das grandezas *massa* e *volume*, sendo o quociente da divisão de massa por volume.

Os problemas correspondentes envolvem, portanto, três grandezas: *a densidade absoluta*, a *massa* e *o volume*. São de três tipos.

1.°) *Dados o volume e a massa de um corpo, determinar a densidade absoluta.* Exemplo:

Se 0,05 *l* de leite pesam 51,5 g, qual a densidade do leite?
Resolução. Se 0,05 *l* ou 0,05 dm³ pesam 51,5 g, 1dm³ pesará:

$$\frac{51{,}5\ g}{0{,}05} = 1\ 030\ g$$

Logo, 1cm³ pesará 1 000 vêzes menos e a densidade será:

$$1{,}030\ g/cm^3 \quad \text{ou apenas} \quad 1{,}030$$

Podemos observar a fórmula:

DENSIDADE ABSOLUTA = MASSA : VOLUME

2.°) *Dadas a densidade absoluta e a massa, determinar o volume.* Exemplo:

Determinar, em litros, o volume ocupado por 36 kg de óleo, cuja densidade é 0,9.

Resolução. Sendo a densidade 0,9, concluímos que 1cm³ pesa 0,9 g; logo, para perfazer 36 kg ou 36 000 g são necessários:

$$\frac{36\ 000}{0{,}9} = 40\ 000\ cm^3$$

Reduzindo a litros, temos:

$40\,000 \text{ cm}^3 = 40 \text{ dm}^3 = 40$ litros.

Resp.: 36kg de óleo ocupam 40 litros.

Podemos observar a fórmula:

VOLUME = MASSA : DENSIDADE

3.º) *Dados o volume e a densidade, determinar a massa.* Exemplo:

A densidade absoluta do álcool-motor é $0{,}8 \text{ g/cm}^3$. Qual a massa de 2 hl?

Resolução. Se 1cm^3 pesa 0,8 g, 2 hl ou $200\,000 \text{ cm}^3$ pesarão:

$200\,000 \times 0{,}8 = 160\,000 \text{ g} = 160\text{kg}$

Resp.: 2 hl de álcool-motor pesam 160kg

Observamos a fórmula:

MASSA = DENSIDADE × VOLUME

EXERCÍCIOS

1. Um hectolitro de água destilada pesa .... kg
2. Um hectograma de água destilada ocupa o volume de .... litros
3. $34{,}5 \text{ kg/m}^3$ = ... g/cm^3 4. $7{,}2 \text{ g/cm}^3$ = ... kg/m^3
5. Se 3 dm^3 de ferro pesam 23,34 kg, a densidade do ferro é .... g/cm^3
6. Se a densidade do mercúrio é $13{,}6 \text{ g/cm}^3$, meio litro de mercúrio pesará .... kg

7. O óleo lubrificante, cuja densidade absoluta é de $0{,}8 \text{ kg/dm}^3$, custa Cr$ 35,00 o litro. Qual a despesa mensal de uma máquina que gasta 240 g de óleo por dia? *Resp.*: Cr$ 315,00
8. Um negociante comprou 80 hl de trigo por Cr$ 18 000,00. Qual o preço de custo do kg, se a densidade do trigo é $0{,}75 \text{ kg/dm}^3$? *Resp.*: Cr$ 3,00
9. Qual a densidade de um líquido, cuja massa de 1,8 *l* é 0,9 kg? *Resp.*: 5 g/cm^3
10. Um pedaço de mármore, pôsto num reservatório cheio de água destilada, fêz transbordar 48 cl de água. Qual a massa do pedaço de mármore, se a densidade absoluta é de $2\,700 \text{ g/dm}^3$? *Resp.*: 1,296 kg

Ângulo e tempo. Números complexos

43. *Primeira unidade legal*

ÂNGULO PLANO

É o *ângulo reto*, que se define como sendo qualquer dos menores ângulos determinados por duas retas concorrentes que formam entre si ângulos adjacentes iguais.

O símbolo dessa unidade é *r*.

44. *Múltiplos e submúltiplos*

Os múltiplos da unidade não têm designação própria. O único submúltiplo que tem designação própria na ordem decimal é o **grado,** centésima parte da unidade.

São usuais os submúltiplos do quadro abaixo:

NOMES	SÍMBOLOS	VALOES
ângulo reto	**r**	**1 r**
grado	**g ou gr**	**0,01 r**
decigrado	**dgr**	**0,001 r**
centigrado	**cgr**	**0,000 1 r**
miligrado	**mgr**	**0,000 01 r**

O símbolo *g* será usado quando não possa haver confusão com o grama e é, pois, pouco aconselhável.

45. *Mudança de unidade*

Para exprimir em grados um ângulo referido a retos e recìprocamente, a vírgula deve ser deslocada de duas ordens, pois o reto tem 100 grados. A mudança de unidades entre os submúltiplos far-se-á deslocando a vírgula uma única ordem. Exemplo:

Exprimir, sucessivamente, em gr, dgr e cgr um ângulo cuja medida é 1,305 6 r

Temos:

$$1{,}305\,6 \text{ r} = 130{,}56 \text{ gr} = 1\,305{,}6 \text{ dgr} = 13\,056 \text{ cgr}$$

46. *Segunda unidade legal. Grau*

Grau é o ângulo equivalente a $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto.

47. *Múltiplos e submúltiplos*

NOMES	SÍMBOLOS	VALORES
grau sexagesimal ou grau........	$^\circ$	$\frac{1}{90}$r
minuto de ângulo ou minuto......	$'$	$\frac{1^\circ}{60}$
segundo de ângulo ou segundo....	$''$	$\frac{1'}{60}$

Para medir um ângulo usa-se o **transferidor,** como se vê na figura 70 em que o ângulo mede 72°.

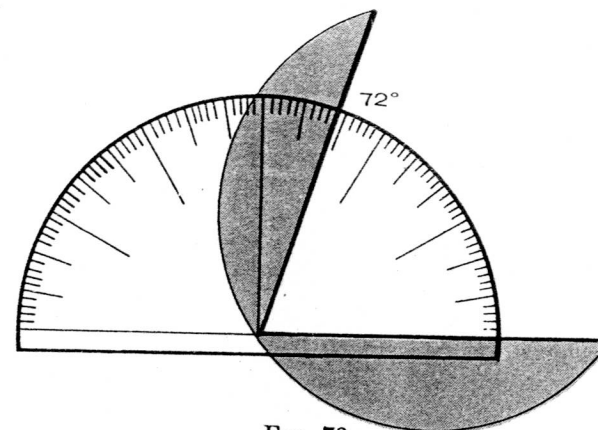



Fig. 70

EXERCÍCIOS

1. Um ângulo de 90° chama-se ....
2. Meça, com o transferidor, os ângulos 1, 2, 3, 4 e 5 da figura 71.
3. Desenhe, usando o transferidor, ângulos de 30°, 45°, 105°, 130° e 73°
4. O ângulo de 30° equivale à fração .... do ângulo reto.
5. O ângulo de 1,4 r tem .... gr
6. 50 gr = ... r = ... °
7. 70 gr = ... retos = ... °
8. O ângulo de 3′ equivale à fração .... do grau.

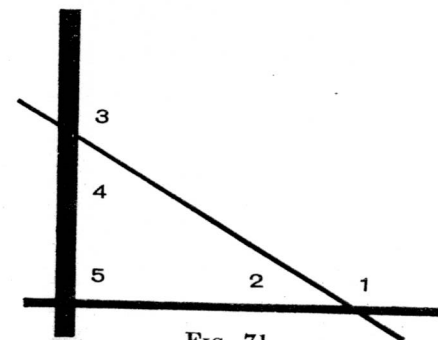



Fig. 71

TEMPO

48. *Unidade legal*

É o **segundo,** que se define como o intervalo de tempo igual à fração $\frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio.

O Sol, em seu movimento diurno aparente, nem sempre passa pelo mesmo meridiano, em intervalos de tempo constantes. Se quiséssemos regular os relógios pelo Sol *verdadeiro,* teríamos de fazer frequentes correções nos ponteiros do mostrador.

Assim, convenciona-se considerar em Astronomia um sol imaginário, denominado *sol médio,* que percorre no Equador celeste distâncias iguais em tempos iguais.

Chama-se, então, **dia solar médio** o intervalo de tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do **sol médio** pelo mesmo meridiano.

49. *Múltiplos e submúltiplos*

NOMES	SÍMBOLOS	VALORES
segundo	s ou **seg**	1 s
minuto	m ou **min**	60 s
hora	h	3 600 s = 60m
dia	d ou **da**	86 400 s = 1 440 m = 24 h

Observação: Serão admitidas também as unidades de tempo estabelecidas pelas convenções usuais do calendário civil e da Astronomia, como, por exemplo, semana, mês, ano, século, milênio etc.

EXERCÍCIOS

1. O intervalo de tempo de 36 min corresponde à fração .... da hora.
2. 2h 40 min = ... min
3. Quarenta segundos valem .... do minuto.
4. Um dia que fração é da semana? E 4 dias?
5. Duas horas valem .... segundos.

UNIDADES INGLÊSAS E AMERICANAS USUAIS

50. *Moeda Inglêsa*

A unidade é a libra esterlina, cujo símbolo é £.

Os submúltiplos são:

NOMES	SÍMBOLO	VALORES
libra	£	1 £
shilling	s	$\frac{1}{20}$ £
penny	d	$\frac{1}{12}$ s = $\frac{1}{240}$ £

51. *Unidades usuais de comprimento*

São as unidades do quadro abaixo, onde a última coluna dá o valor convertido em unidades legais brasileiras.

DENOMINAÇÃO DA UNIDADE		ABREVIAÇÃO INGLÊSA	VALOR CONVERT. EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS
em inglês	em português	relações	
1 inch	1 polegada	in	25,400 mm
1 foot	1 pé	ft = 12in	0,304 80 m
1 yard	1 jarda	yd = 3 ft	0,914 399 m
1 mile	1 milha	mi = 1 760yd	0,609 3 km

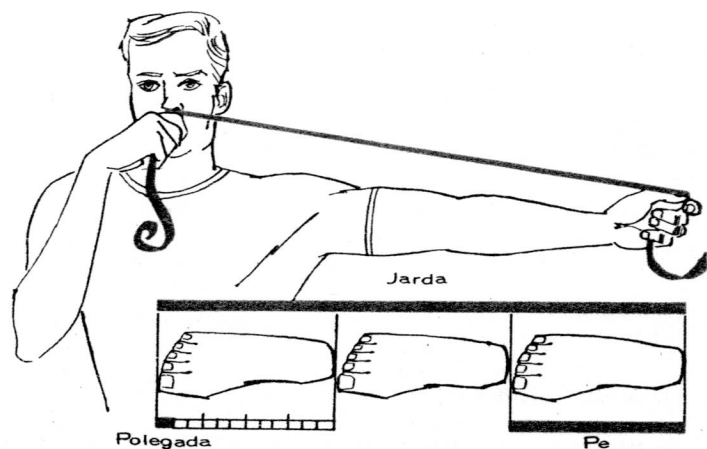



FIG. 72

52. *Unidades de área e de volume*

As unidades de área e de volume formam-se das unidades de comprimento. Exemplos:

1 polegada quadrada ou 1 sq. in. (square inch) é um quadrado que tem 1 polegada de lado.

1 pé cúbico ou 1 cu. ft. (cubic foot) é um cubo que tem 1 pé de aresta.

E assim para as outras unidades.

53. *Unidades usuais de capacidade*

DENOMINAÇÃO DA UNIDADE		ABREVIAÇÃO INGLÊSA	VALOR CONVERT. EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS
em inglês	em português	relações	
1 quart	1 quarta	qt.	1,136 *l*
1 gallon	1 galão	gal. = 4qt.	4,543 963 *l*
1 peck		pk. = 2gal.	9,092 *l*
1 bushel		bu. = 4pk.	3,637 dal

Conversões. Exemplos:

1.º) *Converter em dm^3 o volume de 1gal 2qt.*

Utilizando a tabela de correspondência, podemos usar o seguinte dispositivo de cálculo:

$$1\text{gal} = 1 \times 4{,}543\ 963 = 4{,}543\ 963\ l$$
$$2\text{qt} = 2 \times 1{,}136 = 2{,}272\ l$$
$$1\text{gal}\ 2\text{qt} = 6{,}815\ 963\ l$$

2.º) *Converter em unidades inglêsas 8,5 l.*

Podemos achar o número de quartas correspondentes dividindo o número dado por 1,136, o que dá:

$$8{,}5 : 1{,}136 = 7{,}48\text{qt}.$$

54. *Massa*

DENOMINAÇÃO DA UNIDADE		ABREVIAÇÃO INGLÊSA	VALOR CONVERT. EM UNIDADES LEGAIS BRASILEIRAS
em inglês	em português	relações	
1 ounce (oz)			
1 pound	1 libra	lb. = 16 oz	0,463 502 43kg
1 quarter		qr. = 28lb.	12,70kg
1 hundredweight		cwt. = 4qr.	50,80kg
1 ton	1 tonelada	tn. = 20cwt.	1 016,05kg

RESUMO: UNIDADES DE MEDIDA USUAIS

	DECIMAIS	INGLÊSAS	
COMPRIMENTO	milímetro		
	centímetro	polegada	(in.)
	decímetro	pé	(ft)
	metro	jarda	(yd)
	quilômetro	milha	(mi)
CAPACIDADE	mililitro		
	centilitro		
	decilitro		
	litro	quarta	(qt)
		galão	(gal.)
MASSA	centigrama		
	decigrama	libra	(lb.)
	grama	quarter	(qr.)
	quilograma		
	tonelada	tonelada	(ton.)

EXERCÍCIOS

● **Risque a palavra errada dentro do parênteses:**

1. O centímetro é (maior, menor) que a polegada.
2. A jarda é (maior, menor) que o metro.
3. A quarta vale (mais, menos) que o litro.

● **Complete as lacunas.**

4. O galão tem (maior, menor) capacidade que o litro.
5. 4ft. = ...in. = ...m
6. 16pk. = ...bu. = ...dal
7. 32qt. = ...gal. = ...*l*
8. 72h. = ... dias
9. 100ft = ...m
10. 360mi = ...km
11. 51lbs. = ...kg
12. 120seg. = ...da hora.

NÚMEROS CONCRETOS COMPLEXOS

55. *Noção de complexo*

A medida de uma grandeza pode ser expressa por um número formado de várias partes referidas a dois ou mais múltiplos da unidade principal.

O intervalo de tempo, por exemplo, decorrido das oito horas às dez horas e quinze minutos do mesmo dia, é expresso pelo número:

2h 15min,

que contém duas partes referidas a dois múltiplos da unidade de tempo.

Tais números são denominados *complexos*.

Em oposição, denomina-se *incomplexo* o número concreto referido a uma única unidade. O intervalo de tempo acima mencionado pode ser expresso pelo número incomplexo:

135min.

Os intervalos de tempo e os ângulos têm suas medidas expressas por números complexos.

56. *Conversões com os números complexos*

1.ª) ***Conversão de complexo em incomplexo.*** Há dois casos a considerar:

PRIMEIRO CASO. **Conversão do complexo à menor unidade que nêle figura ou a um seu submúltiplo.** Neste caso, o incomplexo obtido é inteiro. Exemplo:

Exprimir em minutos o número 2d 3h 25m.

Dois dias eqüivalem a 2×24 ou 48 horas; assim:

2d 3h 25m = 51h 25m.

Eqüivalendo a hora a 60m, 51h eqüivalem a 51 vêzes mais; então,

$60 \times 51 = 3\,060,$

51h 25m = 3 060m + 25m = 3 085m

logo, 2d 3h 25m = 3 085m.

Pràticamente utiliza-se o dispositivo ao lado.

```
   2 d
  24 ×
  ----
  48
   3 +
  ----
  51 h
  60 ×
  ----
 3 060
   25 +
  ----
3 085 min
```

SEGUNDO CASO. **Redução do complexo a uma unidade superior à de ínfima espécie.** Neste caso, o número obtido é fracionário. Exemplo:

Exprimir em minuto de ângulo o número 2° 26′ 15″.

O número dado contém (primeiro caso) 8 775″. O segundo vale $\frac{1}{60}$ do minuto, logo, 8 775″ valerão $\frac{8\,775}{60}$ do minuto.

Então, 2° 26′ 15″ = $\frac{8\,775}{60}$ do minuto = $\frac{585}{4}$ do minuto ou, em número decimal:

2° 26′ 15″ = 146′,25

Observemos que, neste caso, resulta uma fração, cujos têrmos são, respectivamente, o número e o múltiplo dados, expressos no menor múltiplo que figura no número.

2.ª) ***Conversão de incomplexo em complexo.***

PRIMEIRO CASO. **O número dado é inteiro.** Exemplo: Exprimir em complexo 15 216″.

O resultado virá expresso em graus, minutos e segundos.

Em 15 216″ há tantos minutos quantas vêzes 15 216 contiver 60; efetuando a divisão encontramos:

$15\,216 = 253 \times 60 + 36$

Resulta, então:

15 216″ = 253′ 36″

Em 253′ haverá tantos graus quantas vêzes 253 contiver 60; efetuando a divisão encontramos:

$253 = 4 \times 60 + 13$

Concluímos: 253′ = 4° 13′

e, portanto, 15 216″ = 4° 13′ 36″

Dispositivo prático:

```
15 216 | 60
  321  |------
  216  | 253 | 60
   36″ | 13′ |----
       |     | 4°
```

SEGUNDO CASO. **O número dado é uma fração ordinária.**

Converter em complexo $\frac{58}{15}$ *a*

Extraindo os inteiros, encontramos 3*a* e a fração $\frac{13}{15}$ do ano, ou $\frac{13}{15}$ de 12me. Como $\frac{13}{15}$ de 12 valem $\frac{52}{5}$ ou $10\frac{2}{5}$, concluímos $\frac{58}{15} a = 3a$ 10me $\frac{2}{5}$.

A fração $\frac{2}{5}$ do mês corresponde a $\frac{2}{5}$ de 30d. Sendo $\frac{2}{5}$ de 30 = 12.

Temos finalmente: $\frac{58}{15}a = 3a$ 10me 12d.

Dispositivo prático.........

Conversão do resto em meses

Conversão do resto em dias

58	15
13	3a 10me 12d
× 12	
156	
06	
× 30	
180	
30	
0	

Terceiro caso. O número dado é decimal. Exemplo: Transformar em complexo o número 18°,095.

O número contém 18° e a fração 0,095 do grau. O número de minutos que eqüivale a

$$0{,}095 \text{ do grau é}$$

$$0{,}095 \times 60 = 5{,}70$$

O número contém 5′ e a fração 0,7 do minuto. Multiplicando a fração de minuto por 60, temos:

$$0{,}7 \times 60 = 42$$

Concluímos: $18°{,}095 = 18°\ 5'\ 42''$.

EXERCÍCIOS

Reduzir a forma inteira:

1) 2d 1h 20min. *Resp.:* 2 960 min.
2) 20° 20′ 15″. *Resp.:* 73 215″.
3) 18° 20″. *Resp.:* 64 820″.

Converter em complexos:

4) 2 581d. *Resp.:* £ 10 – 15 – 1.
5) 1 583min. *Resp.:* 1d 2h 23min.
6) $\frac{28}{5}$ £ *Resp.:* £ 5 – 12.
7) $\frac{31}{51}a$ *Resp.:* 2a 24d.

8) $\frac{5°}{8}$ *Resp.:* 37′ 30″.
9) 15°,73 *Resp.:* 15° 43′ 48″.
10) Exprimir em horas 10d 5h 4m. *Resp.:* $\frac{3\,676}{15}$ h.
11) Exprimir em shilling £3 – 4 – 7. *Resp.:* $\frac{775}{12}$ sh.
12) Exprimir em minuto 12° 20′ 36″. *Resp.:* $\frac{3\,703'}{5}$.

OPERAÇÕES

57. *Adição*

Problema. ***Num circuito de automóveis em duas voltas, o automobilista vencedor percorreu a primeira volta em 2h 38m 46s e a segunda em 2h 32m 58s. Qual o tempo gasto no circuito?***

Devemos somar os tempos parciais gastos em cada volta. Comecemos pelos segundos:

58s + 46s = 104s ou 1m 44s

a soma dos minutos é:

38m + 32m = 70m ou 1h 10m

a soma das horas é:

2h + 2h = 4h

Adicionando os resultados parciais escritos na última coluna obtemos 5h 11m 44s, que é o tempo gasto no circuito.

Disposição prática:

Reservas	1	1	
Parcelas	2h 2h	32m 38m	58s 46s
Primeiros totais.	4h	70m	104s
Resultados	5h	11m	44s

58. *Subtração*

Problema. *Um automobilista percorre duas voltas de um circuito em 5h 11m 44s. Tendo gasto 2h 38m 46s na segunda volta, qual o tempo em que percorreu a primeira?*

O tempo gasto na primeira volta é a diferença entre o tempo total e o gasto na segunda.

Não sendo possível de 44s subtrair 46s, subtrairemos êste número de 1m 44s ou 104s, o que corresponde a escrever o minuendo com a forma eqüivalente 5h 10m 104s. Assim:

104s – 46s = 58s

Os 11m do minuendo ficaram reduzidos a 10 em virtude da transformação anterior. Não sendo possível subtrair 38m de 10m, subtrairemos de 1h 10m ou 70m.

70m – 38m = 32m.

As 5h do minuendo ficaram reduzidas a 4h; subtraindo 2h temos o resultado 2h.

O tempo gasto na primeira volta foi 2h 32m 58s.

Dispositivo prático:

5h	11m	44s	=	4h	70m	104s
				2h	38m	46s
				2h	32m	58s

EXERCÍCIOS

Efetuar, dando os resultados sob a forma mais simples:

1. 14° 28′ + 15° 47″ + 38° 56′ 23″
2. 5£ 7sh 11d + 15sh 8d + 2£ 18sh
3. 4me 15d 23h + 2me 18d 20h
4. 5yd 2ft 8in + 2yd 1ft 11in

5. 3gal. + 1gal 3qt + 1gal 2qt
6. 15° 28′ 16″ – 10° 30′ 14″
7. 90° – 36° 18′ 45″
8. 1£ – 18sh 10d
9. 4yd 5in. – 1yd 2ft 8in
10. 3h 45min – 2h 27min 36seg

Reduzir a unidades legais brasileiras:

11. 1pk 2gal 4qt
12. 2yd 2ft 8in

RESPOSTAS:

1. 68° 25′ 10″
2. £ 9–1–7
3. 7me 4d 19h
4. 8yd 1ft 7in
5. 6gal 1qt
6. 4° 58′ 2″
7. 53° 41′ 15″
8. 1sh 2d
9. 2yd 9in
10. 1h 17min 24seg
11. 22, 720*l*
12. 2,641m

59. *Multiplicação e divisão*

PRIMEIRO CASO. **Multiplicador inteiro. Divisor inteiro.**

Primeiro problema. *Um ponteiro percorre um arco de 4° 28′ 13″ em um segundo. Que arco percorrerá em 20 segundos?*

Em 20 segundos percorrerá um arco 20 vêzes maior. O resultado será, portanto, obtido multiplicando o arco por 20.

Multiplicando os segundos por 20:

$$13'' \times 20 = 260'' \text{ ou } 4'\,20''$$

Multiplicando os minutos:

$$28' \times 20 = 560' \text{ ou } 9^\circ\,20'$$

Multiplicando os graus:

$$4^\circ \times 20 = 80^\circ$$

Somando os produtos parciais obtemos finalmente:

$$4^\circ\,28'\,13'' \times 20 = 89^\circ\,24'\,20''$$

Dispositivo prático do cálculo:

	4°	28′	13″
			20
Primeiros produtos:	80°	560′	260″
Resultado.	89°	24′	20″

Segundo problema. *Um ponteiro percorre em 4 minutos um arco de 13° 27′ 36″, que arco percorrerá em 1 minuto?*

Para obter o arco percorrido em 1 minuto, dividiremos por 4 o número 13° 27′ 36″.

```
13° 27′ 36″ | 4
 1          |-----------
×60         | 3° 21′ 54″
----
60 87′
    7
    3
  ×60
  ----
  180 216
       16
        0
```

Usando o dispositivo ao lado, dividimos 13° por 4; o quociente é 3° e o resto 1°. Êste resto corresponde a 60′ que reunidos aos 27′ do número dado perfazem 87′. Dividimos 87′ por 4. O quociente é 21′ e o resto 3′. Êste resto corresponde a 60 × 3 ou 180 segundos que reunidos aos 36″ do número dado perfazem 216″.

Dividimos 216″ por 4. O quociente é 54″ e o resto zero.

Segundo caso. **Multiplicador fracionário. Divisor fracionário.**

Problema. *O salário mensal de um comerciário é £38–16–9.*

Quanto deve receber, tendo trabalhado $\frac{2}{3}$ *do mês?*

Dividindo o salário por 3 obtemos $\frac{1}{3}$ do mesmo e multiplicando o resultado por 2 teremos os $\frac{2}{3}$, o que corresponde a efetuar a multiplicação

$$(£38–16–9) \times \frac{2}{3}$$

Usamos o dispositivo seguinte:

```
£ 38–16–9  | 3
  08       |-----------
   2       | £ 12–18–11
 × 20      |          2
 -----     |-----------
  40 56    |   24–36–22  →  1.os produtos
     26    |
      2    | £ 25–17–10  →  resultado
   × 12    |
   -----   |
     24 33 |
         3 |
         0 |
```

Para dividir um complexo por uma fração, multiplicamos o complexo pela fração invertida, de acôrdo com a regra conhecida de divisão. Assim, a operação se reduz ao caso do exemplo estudado.

Terceiro caso. **Multiplicador complexo. Divisor complexo.** Exemplos:

1.°) Multiplicador complexo.

Problema. *Um ponteiro percorre por hora um arco de 13° 28′. Que arco percorrerá em 3h 15m?*

Como conhecemos o percurso por hora, convertamos 3h 15m em fração de hora:

$$3h\ 15m = \frac{195}{60}\ h = \frac{13}{4}\ h$$

Se o ponteiro percorre por hora um arco de 13° 28′, em $^{13}/_4$ da hora percorrerá:

$$13°\ 28′ \times \frac{13}{4} = 43°\ 46′.$$

2.°) Divisor complexo, da espécie do dividendo.

Neste caso, o problema consiste em verificar quantas vêzes um número contém outro. Transformam-se o dividendo e o divisor em incomplexos e efetua-se a divisão.

Seja dividir 114° 40″ por 28° 30′ 10″.

Temos: 114° 40″ = 410 440″
28° 30′ 10″ = 102 610″

Efetuando a divisão, vem:
410 440″ : 102 610″ = 4.

Observe-se que o quociente é abstrato.

EXERCÍCIOS

● **Efetue as operações:**

1) (£ 3 12sh 7d) × 3.
Resp.: £10 – 17 – 9.

2) (2° 45′ 45″) × $\frac{12}{5}$.
Resp.: 6° 37′ 48″.

3) (17d 23h 10m) : 5.
Resp.: 3d 14h 14min.

4) (6° 37′ 48″) : $\frac{12}{5}$.
Resp.: 2° 45′ 45″.

5) (2yd 8 in) × 25.
Resp.: 55yd 1ft 8in.

6) (18° 36′ 48″) : 20.
Resp.: 55′ 50″ $\frac{2}{5}$.

7) £ 5 – 18 – 3 × $\frac{3}{4}$.
Resp.: £ 4 – 8 – 8$\frac{1}{4}$.

8) (6° 37′ 48″) : 2 $\frac{2}{5}$.
Resp.: 2° 45′ 45″.

9) (5d 3h 45min) × 3 $\frac{2}{5}$.
Resp.: 17da 12h 45min

10) (58° 17′ 36″) : 2 $\frac{1}{3}$.
Resp.: 24° 58′ 58″ $\frac{2}{7}$.

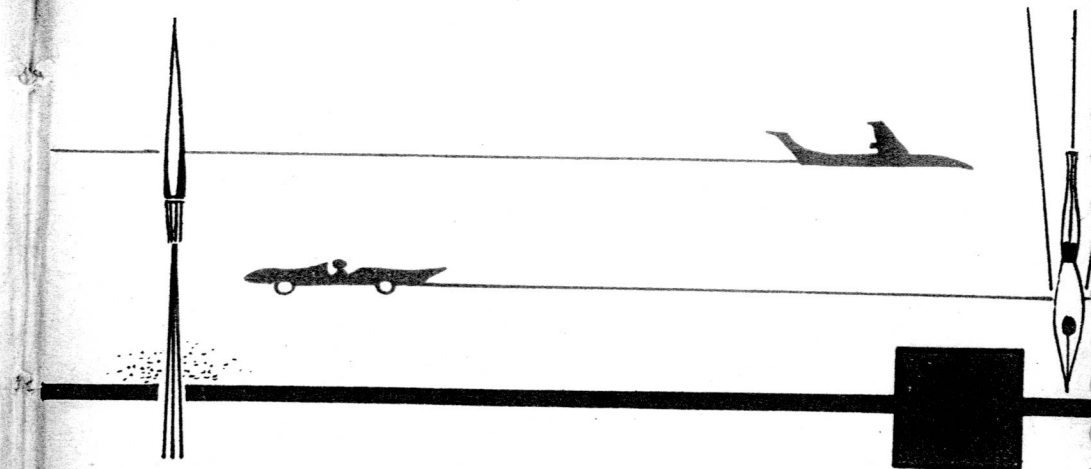
● — **Resolva os problemas:**

11) Quanto custarão 5yd 10in de casimira a 15sh a jarda? *Resp.:* £ 3 – 19 – 2.

12) Calcular o perímetro de um quadrilátero, cujos lados medem, respectivamente, 3ft 4in, 2ft 7in, 58in e 3ft. Converter a medida do perímetro em metros. *Resp.:* 4,191m.

13) Um bico de gás consome por hora 30 litros de gás. Quantos litros consumirá ficando aceso durante 3h 15m? *Resp.:* 97,5*l*.

14) Um comerciário trabalhou 2me 25d e recebeu £ 38 – 16 – 8. Qual o salário mensal? *Resp.:* £ 13 – 14 – 1 $\frac{7}{17}$.

15) O ponteiro de um marcador percorreu em 1d 8h um arco de 38° 20′ 18″. Qual o arco percorrido no dia? *Resp.:* 28° 45′ 13,5″.

Velocidade

60. *Unidade de velocidade*

O automóvel da figura 73 percorreu 240km em 4 horas. Quantos quilômetros percorreu em 1 hora? Quantos metros percorreu em 1 segundo?

Em uma hora percorreu:

240 km : 4 = 60 km.

Dizemos, então que a **velocidade** do automóvel foi de 60km por hora e escrevemos

60 km/h

Uma hora tem 3 600 seg e 60km são 60 000m. Logo, se percorreu 60 km em uma hora ou 3 600 seg, em um segundo percorrerá:

60 000m : 3 600 = 16,6 m

Dizemos, também, que a **velocidade** do automóvel foi de 16,6m por segundo, ou 16,6 m/s.

Para indicar a velocidade de um móvel toma-se como unidade o *metro por segundo*, isto é, a velocidade de um móvel que percorre 1 *metro em cada segundo*. É usual, também, a unidade quilômetro por hora, isto é, do móvel que percorre 1km em 1 hora.

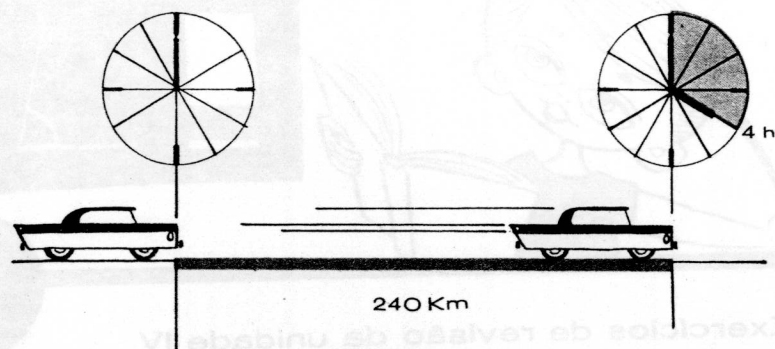



FIG. 73

MÚLTIPLOS E SUBMÚLTIPLOS USUAIS

NOMES	SÍMBOLOS	VALORES
Metro por segundo	m/seg	1m/seg
Quilômetro por hora ...	km/h	$\frac{1}{3,6}$ m/seg
Metro por minuto	m/min	$\frac{1}{60}$ m/seg
Centímetro por segundo	cm/seg	0,01m/seg
Nó	—	0,514 44m/seg

61. *Mudança de unidade*

Para referir a uma nova unidade, um número que exprima a medida de uma velocidade, basta multiplicar ou dividir a unidade de tempo ou de comprimento que figura no número pela relação entre ela e a nova unidade em que se quer referir o número dado. Exemplos:

1.º) **Mudança de unidade de comprimento.** Exprimir em km/h a velocidade 400m/h.

Reduzindo os quatrocentos metros a quilômetros, temos:

400m/h = 0,4km/h.

2.º) **Mudança de unidade de tempo.** Exprimir em m/h a velocidade de 3,1m/min.

Se o móvel percorre 3,1m em um minuto, em uma hora percorrerá 60 vêzes o comprimento; logo, temos:

3,1m/min = 186m/h.

3.º) **Mudança da unidade de tempo e de comprimento.** Exprimir em km/h a velocidade de 120m/min.

a) Mudamos, em primeiro lugar, a unidade de comprimento e temos:

120m/min = 0,120km/min.

Se o móvel percorre 0,120km em um minuto, em uma hora percorrerá distância 60 vêzes maior; assim:

120m/min = 0,120km/min = 7,2km/h.

b) Podemos mudar em primeiro lugar a unidade de tempo, e obtemos:

120m/min = 7 200m/h = 7,2km/h.

EXERCÍCIOS

Referir ao km/h as velocidades:

16) 10m/s. *Resp.:* 36km/h.
17) 45m/min. *Resp.:* 2,7km/h.
18) 3km/min. *Resp.:* 180km/h.
19) 118dam/min. *Resp.:* 70,8km/h.

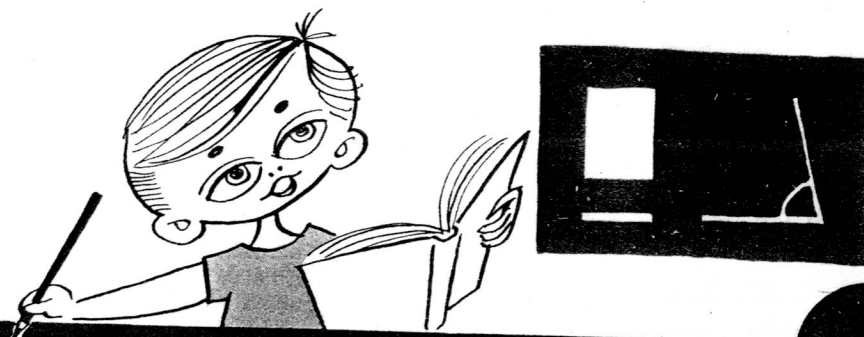
Reduzir a m/s as velocidades:

20) 210km/h. *Resp.:* 58,33m/s.
21) 2,8km/min. *Resp.:* 46,66m/s.

Resolver os problemas:

22) Numa viagem de trem um viajante consulta o relógio no momento exato em que o trem passava no marco quilométrico 237. Eram 8h 17min. Às 8h 25min, o trem passa no marco 249km. Calcular a velocidade do trem em m/min e km/h.
Resp.: 1 500m/min e 90km/h.

23) Um motorista cobra Cr$ 20,00 por hora a um passageiro, para levá-lo a uma cidade que dista 168km de seu ponto de estacionamento. Partem às 6 horas da manhã e fazem a viagem com a velocidade média de 42km/h. Permanecem parados na cidade durante 2h. A que horas estarão de volta? Quanto deve receber o motorista?
Resp.: 16 horas; Cr$ 200,00.

24) Duas estações, *A* e *B*, de uma linha férrea, distam 20km. Um trem parte da estação *A* na direção de *B*, com a velocidade de 90km/h. No mesmo instante e na mesma direção, parte de *B* um segundo trem, com a velocidade de 10hm/min. No fim de quantas horas será o segundo trem alcançado pelo primeiro? A que distância da estação *A* ocorrerá o encontro? *Resp.:* 40min; 60km.

Exercícios de revisão da unidade IV
Exercícios de revisão geral para a segunda prova parcial

● — **Complete as lacunas:**

1. 1 857dm = ...m   15,750hm = ...m   19,7mm = ...dm
2. 5,207hm^2 = ...a   7,80dm^2 = ...dam^2 3ha = ...m^2
3. 2 347 cm^3 = ...m^3 1,4 hl = ...cm^3 0,43m^3 = ...litros.
4. 3yd 2ft = ...in   1 845″ = ...″   340d = £... – .. – ..
5. 4 580 min = ..d..h..min   852in = ...yd...ft   5yd 2ft 8in = ...yd
6. 2yd 2ft = ...m   1ft7in = ...dm   3mi = ...km

● **Efetue:**

7. $\frac{2}{3}$ de £8–5–6   8. $\frac{3}{8}$ de 5yd 2ft 8in   9. $\frac{2}{5}$ de 79° 41′ 16″
10. Converter $\frac{13}{4}$ do dia em complexo.
11. Converter 7h 4min em fração da hora.
12. Exprimir em minutos : 3d 4h e 7 min 36 seg
13. Exprimir em meses, dias e horas: 32,125 d e 5,25 me
14. Exprimir em meses, dias e horas: $\frac{13}{18}a$ e $\frac{571}{20}$ h
15. 2me 15d 8h + 29d 18h
16. 30° 18′ 35″ – 24° 34′ 56″
17. 2yd 1ft 5in – 1yd 2ft 7in

● **Resolva:**

18. As rodas de um automóvel têm 0,35 m de raio. Quantas voltas dá cada roda, quando o carro percorre 9,891 hm?
19. Qual o lado do quadrado, cujo perímetro tem 16 m?
20. O perímetro de um retângulo tem 70 cm. A base vale 5/9 da altura. Calcule a base e a altura.
21. Achar a base de um retângulo, cujo perímetro é de 36 dm e a altura tem 8 dm.
22. Achar a área, em ha, de um terreno quadrado que tem 2,7km de lado. *Resp.:* 729 ha
23. Um terreno tem 152 m de comprimento e 38 m de largura. Achar a área. *Resp.:* 5 776 m^2
24. Uma sociedade adquire uma fazenda de 5,28ha para fazer um loteamento. O arruamento diminui a área da propriedade de 53 a. O resto é dividido em 125 lotes iguais. A sociedade vende os lotes a Cr$ 85,00 o m^2. Calcular, em m^2, a área de cada lote, o preço do lote e a quantia apurada pela sociedade.
Resp.: 380m^2; Cr$ 32 300,00; Cr$ 4 037 500,00.
25. A cobertura de um hangar é formada de dois trapézios iguais e de dois triângulos iguais. As bases dos trapézios têm, respectivamente, 13 m e 7m; a base dos triângulos tem 6 m. Os trapézios e os triângulos têm a mesma altura de 3,5 m. Na cobertura são utilizadas chapas de zinco, pagas ao preço de Cr$ 13,00 o m^2, incluído o transporte. No cálculo acrescenta-se um décimo da área total para as juntas e outras perdas. Calcular a despesa. *Resp.:* Cr$ 1 301,30.
26. Calcular a área de um círculo de 2,5 cm de raio. *Resp.:* 19,625 0 cm^2
27. Calcular a área de um triângulo, cuja base é o dôbro da altura e a soma das duas dimensões 24 m. *Resp.:* 64 m^2
28. A base de um retângulo é o triplo da altura e o perímetro mede 4 dam. Calcular a área em m^2. *Resp.:* 75 m^2.
29. O proprietário de um terreno de 25 m de frente por 40 m de fundo, cujo preço é de Cr$ 24,00 o m^2 quer trocá-lo por outro situado numa localidade onde o m^2 vale apenas Cr$ 15,00. Qual a área que deverá ter o nôvo terreno? *Resp.:* 1 600 m^2
30. O telhado de um galpão tem 37,5 m^2. Quantas telhas de 2,5 dm^2 serão necessárias para cobrí-lo, se, ao colocá-las, são superpostas de tal forma que perdem $^1/_4$ de sua área? *Resp.:* Dois milheiros.
31. Uma casa tem 9 janelas, cada uma com 8 vidros iguais de 0,84m de comprimento e 0,42 m de largura. Quanto se pagará para envidraçar as janelas dessa casa, sabendo que o vidro custa Cr$ 0,25 o m^2 e a mão-de-obra Cr$ 6,00 por janela? (C. M.) *Resp.:* Cr$ 416,88.

32. Um campo de forma retangular mede 3 dam de frente e $^1/_4$ hm de fundo. Sabendo que $^2/_3$ da superfície estão cultivados, pede-se em ha a área da parte não cultivada (C. M.) *Resp.:* 0,025 ha
33. Calcular o volume de um cilindro, cujo raio da base tem 2 dm e a altura 4 dm. *Resp.:* 50,240 dm^3
34. Calcular o volume de um prisma quadrangular regular, cuja altura é igual ao lado da base e o perímetro desta mede 16 m. *Resp.:* 64 m^3
35. Calcular o volume de um cilindro de 5 dm de raio, cuja altura tem a mesma medida do diâmetro da base. *Resp.:* 785 dm^3
36. Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, cuja altura é o dôbro do comprimento e êste o triplo da largura, sabendo que a soma das três dimensões é 30 dm. *Resp.:* 486 dm^3
37. A altura de um paralelepípedo mede $^2/_3$ do comprimento e êste $^3/_5$ da largura. As três dimensões medem juntas 30 m. Calcular o volume. *Resp.:* 810 m^3
38. Uma estrada de 3km de comprimento e 6m de largura é coberta de pedra britada numa espessura de 5 cm. Sendo Cr$ 25,00 o custo do m^3 de pedra, qual a despesa de material com a pavimentação? *Resp.:* Cr$ 22 500,00.
39. As dimensões internas de um reservatório de óleo são: 0,045 hm, 24 dm e 3,2 m. O óleo é vendido em latas cúbicas de 6 dm de altura ao preço de Cr$ 300,00 por lata. Qual o valor total do óleo? *Resp.:* Cr$ 48 000,00.
40. Uma caixa d'água retangular tem 24,300 m^3 de volume. A profundidade da caixa corresponde a $^4/_5$ do comprimento, o qual mede 4 500 mm. Calcular, em metros, a largura. *Resp.:* 1,5 m
41. Um brejo de 2,5 ha é cultivado com um arrozal que produz 5 litros por m^2. Valendo Cr$ 10,00 o saco de 50 kg e sendo a densidade do arroz 0,8 kg/*l*, qual o valor da produção? *Resp.:* 20 mil cruzeiros.
42. Qual o volume, em m^3, de 743,7kg de água distilada? *Resp.:* 0,743 7 m^3
43. Qual o preço de 8yd 2ft 9in de fio de cobre, sabendo-se que cada jarda custa £ 0 – 14 – 5? *Resp.:* £ 6 – 8 – 6 $\frac{7}{12}$
44. Qual o preço de uma jarda de arame, sabendo-se que 9yd 1ft 4in custaram £ 89 – 5 – 0? *Resp.:* £ 9 – 9 – 0
45. Qual o preço de um galão de tinta, sabendo-se que 3 gal 2 qt custam £ 7 – 8 – 2? *Resp.:* £ 2 – 2 – 4
46. Um operário recebeu £ 10 – 8 – 1 por um serviço de 5d 4h, sendo de oito horas o dia de trabalho. Quanto ganha o operário por dia de trabalho? *Resp.:* £ 1 – 17 – 10

47. Subtraindo do ângulo reto o dôbro de um ângulo desconhecido encontramos 18° 20′ 16″. Qual é o ângulo? *Resp.:* 35° 49′ 52″

48. Um reservatório é alimentado por duas torneiras. A primeira pode enchê-lo em 15 horas e a segunda em 12. Conservando-se abertas as duas torneiras, a primeira durante 24 minutos e a segunda durante 20 minutos, que parte do reservatório ficará cheia?

Resp.: $\frac{49}{900}$

49. O arco de um grau meridiano tem aproximadamente 111,111km. Pede-se o comprimento de um arco de 5° 28′.

Resp.: 607 406,8 m

50. Um automóvel percorre 507 km em 10 h 50 min. Calcular a velocidade do automóvel em km/h e m/s. *Resp.:* 46,8 km/h e 13 m/s

RESPOSTAS dos exercícios 7 a 17.

7. £5 – 10 – 4
8. 2yd $7\frac{1}{2}$ in
9. 31° 52′ 30,4″
10. 3d 6h
11. $\frac{106}{15}$ h
12. 4567,6min
13. 1me 2d 3h e 5me 7d 12h
14. 8me 20d e 1d 4,55h
15. 3me 15d 2h
16. 5° 43′ 39″
17. 1ft 10in

EXERCÍCIOS DE REVISÃO GERAL

● **Complete as lacunas:**

1. A diferença entre 34 meias dezenas e 1 centena, em algarismos romanos, escreve-se............
2. Para numerar as páginas de um caderno foram escritos 396 algarismos. O caderno tinha............ páginas.
3. A diferença entre dois números é 40. A soma dos três números que figuram na subtração é 380. O número menor é............
4. Devia multiplicar um número por 213 e, por engano, multipliquei-o por 231. Achei, então, um produto que excedeu o verdadeiro de 252 dezenas. O número é............
5. Numa divisão, o divisor é 23, o quociente é o triplo do divisor e o resto é o maior possível. O dividendo é............
6. O valor de *a* no número 23 a 7 para que o mesmo seja divisível por 11 é............

7. Os múltiplos comuns de 5 e 7, compreendidos entre 142 e 260 são............
8. Um número decomposto em fatôres primos é $2^3 \times 3^x$. Se êste número tiver 12 divisores, o valor de x será............
9. O m.d.c. de dois números é 4 e o m.m.c. é 120. Sendo um dos números 24, o outro será............
10. Os três maiores divisores comuns de 612 e 462 são............
11. Multipliquei um número por 3/5 e obtive um resultado 24 unidades menor que o número. O número é............
12. Se somarmos a $\frac{2}{3}$ o seu inverso, obteremos............
13. A fração equivalente a 18/16, cuja diferença dos têrmos é 4 é............
14. A fração irredutível equivalente a 0,45 é............
15. Somando a um número seus 0,6 obtemos 96. O número é............

● **Resolva os problemas:**

16. Pedro e João têm juntos Cr$ 1 200,00. Se Pedro der Cr$ 300,00 a João, ainda ficará com o dôbro da quantia daquele último. Quanto tem cada um?
17. Se somarmos a um número o quociente de sua divisão por 7, obteremos 248. Ache o número.
18. Numa divisão exata de divisor 8, faltam 350 unidades ao quociente para igualar o dividendo. Calcule o dividendo.
19. Quantos múltiplos comuns de 45 e 36 existem entre 1587 e 2729?
20. Calcule os três menores números pelos quais se deve multiplicar 40, 60 e 140 para que os produtos obtidos sejam iguais.
21. O triplo da diferença de dois números é 360, sendo o menor 1/4 do maior. Ache os dois números.
22. Carlos gastou 3/5 do que possuía e mais Cr$ 720,00, ficando com Cr$ 1 800,00. Quanto possuía?
23. D. Zulmira tinha bombons, deu 2/5 às alunas que tiveram grau dez em matemática. Guardou 1/3 do resto para as sobrinhas e ainda ficou com 46. Quantos bombons possuía D. Zulmira?
24. O quociente da divisão de um número por 3/5 é maior que o número. O excesso sôbre o número é de 48 unidades. Qual o número?
25. Somei um número com 0,7 e obtive 6,8. Qual o número?
26. Dividi um número por outro e achei 0,25 para quociente. Se dividir o segundo pelo primeiro, que quociente encontrarei?

27. Uma pipa cheia d'água pesa 850kg com água até a metade, pesa 610kg. Achar, em hectolitros, a capacidade da pipa.

28. O perímetro de um terreno tem 34dam. O comprimento tem 0,7 da largura. Calcular o comprimento, em metros.

29. Um pátio retangular tem 15m de largura. Para pavimentá-lo gastou-se a importância de Cr$ 112 500,00 à razão de Cr$ 300,00 por m². Achar o perímetro do pátio.

Respostas

1. LXX
2. 168
3. 150
4. 140
5. 1609
6. 8
7. 175, 210, 245
8. 2
9. 20
10. 12,6 e 4
11. 60
12. $2\frac{1}{6}$.
13. 36/32
14. 9/20
15. 60
16. Cr$ 100,00 e Cr$ 1 100,00
17. 217
18. 400
19. 7
20. 21, 14 e 6
21. 40 e 160
22. Cr$ 6 300,00
23. 115
24. 72
25. 6,1
26. 4
27. 4,8hl
28. 70m
29. 80m